

## David Hilbert und die „Hilbertschen Probleme“



**David Hilbert**

(1862 bis 1943)

Am 8. August 1900 hielt der bedeutende deutsche Mathematiker David Hilbert auf dem Zweiten Internationalen Mathematikerkongress in Paris den Vortrag „Mathematische Probleme“, in dem er den bis dahin einmaligen Versuch unternahm, Grundprobleme der mathematischen Forschung für das kommende Jahrhundert zu benennen. Er formulierte 23 Aufgaben, welche die bestimmenden Teile der Mathematik an der Wende zum 20. Jahrhundert erfassten.

Die von Hilbert gestellten Probleme sind in ihrem Charakter sehr unterschiedlich. Sie reichten von klar eingegrenzten Fragen, für die eine eindeutige, bejahende oder verneinende Antwort gefordert wurde, bis hin zur Begründung einer ganzen Theorie oder zur Weiterentwicklung einer mathematischen Teildisziplin. In einigen Fällen hatte Hilbert auch mehrere sehr eng miteinander verknüpfte Fragen zu einem Problem zusammengefasst. Thematisch begann Hilbert mit den Grundlagen der Mathematik und der Mengenlehre, wo er das berühmte Kontinuumsproblem stellte. Es besagt: Jede unendliche Zahlen- oder Punktmenge lässt sich umkehrbar eindeutig entwe-

der auf die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen oder die Menge  $\mathbb{R}$  sämtlicher reeller Zahlen (also z.B. auf die Menge der Punkte einer Strecke, das so genannte „Kontinuum“) abbilden – „zwischen“  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$  gibt es (der „Mächtigkeit“ nach) keine weitere unendliche Menge, die als Bildmenge in Frage käme.

In seinem Vortrag ging Hilbert dann zur Geometrie und zu Fragen der Gruppentheorie über. Es folgten Zahlentheorie, Algebra und algebraische Geometrie, bevor er sich abschließend verschiedenen Teilgebieten der Analysis in mehreren Problemen zuwandte. Eine gewisse Sonderrolle, von Hilbert jedoch in enger Verbindung zu seinen Studien zu den Grundlagen mathematischer Disziplinen gesehen, nahm das 6. Problem „Mathematische Behandlung der Physik“ ein, in dem er vor allem eine Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mechanik forderte.

Rückblickend kann man heute feststellen, dass die Entwicklung der Mathematik in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts die Aktualität der Hilbertschen Probleme erwiesen hat, auch wenn sich nicht alle der gestellten Probleme als zentrale Forschungsthemen erwiesen und manche Entwicklungsrichtung zu Beginn des Jahrhunderts noch nicht voraussehbar war. Dessen ungeachtet hat Hilberts Vortrag stets eine gewisse Faszination auf die Mathematiker ausgeübt und anregend gewirkt.

Man wird allerdings dem Hilbertschen Anliegen nicht gerecht, wenn man den Vortrag auf die Formulierung der 23 Probleme reduziert. Ebenso wichtig war sein in der Einleitung vorgetragenes Plädoyer für die Einheit der Mathematik, den Zusammenhang von Mathematik und Naturwissenschaften und über die Rolle „gut gestellter“ Probleme für die Entwicklung einer Wissenschaft. „Solange ein Wissenszweig Überfluss an Problemen bietet“, so sagte er, „ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbständigen Entwicklung. ... Durch die Lösung von Problemen stählt sich die Kraft des Forschers ...“ Angesichts des ungeheuren Wachstums der naturwissenschaftlichen wie mathematischen Erkenntnisse und der fortschreitenden Spezialisierung der mathematischen Forschung hat dieses Anliegen nichts an Aktualität verloren.

Mit dem Pariser Vortrag stellte Hilbert einmal mehr seinen außerordentlich fundierten Überblick über das mathematische Wissen seiner Zeit unter Beweis, zu dessen Bereicherung er im Verlaufe seines langen Schaffens wesentlich beitrug. Geboren wurde David Hilbert am 23. Januar 1862 in Königsberg in der Familie eines preußischen Beamten. Nach dem Besuch des Gymnasiums studierte er 1881–1885 in Königsberg bzw. im Sommersemester 1882 in Heidelberg Mathematik. Nach der Promotion und dem Staatsexamen für das höhere Lehramt erweiterte er seine mathematische Bildung in Leipzig und Paris. 1886 habilitierte er sich in Königsberg und wirkte dort als Privatdozent, Extraordinarius und Ordinarius. Auf Initiative Felix Kleins erhielt Hilbert 1895 eine Berufung an die Universität Göttingen. Trotz vieler Angebote von anderen Hochschulen blieb er Göttingen treu und hatte wesentlichen Anteil am Aufstieg dieser Universität zu einem Weltzentrum der Mathematik.

Hilberts mathematisches Schaffen lässt sich in recht klar unterschiedene Perioden einteilen. Im Anschluss an seine Promotion beschäftigte er sich weiter mit der Invariantentheorie und löste das Grundproblem dieser Theorie, indem er die Existenz eines endlichen Basissystems für jedes System algebraischer Formen nachwies. Grundlegend neu an diesem Beweis war, dass das Basissystem nicht konstruiert, sondern nur dessen Existenz gezeigt wurde. Hilberts Vorgehensweise zeigte bereits die Merkmale einer abstrakten axiomatischen Denkweise. In den folgenden Jahren wandte sich Hilbert stärker zahlentheoretischen Fragen zu. Ein Ergebnis dieser systematischen, tiefgründigen Studien war der 1897 erschienene „Zahlbericht“, der die Entwicklung der neueren Zahlentheorie maßgeblich förderte. Ab 1898 standen die Grundlagen der Geometrie im Mittelpunkt seines Schaffens, für die er sich seit 1891 interessierte. 1899 gab er dann in dem Buch „Grundlagen der Geometrie“ den bis in die Antike zurückreichenden Diskussionen um die Axiomatik der Geometrie eine abschließende Formulierung, begründete die heute übliche Form der Axiomatik und vollzog endgültig die Trennung mathematisch-logischer Elemente vom Sinnlich-Anschaulichen. Die geometrischen Objekte und die Beziehungen zwischen ihnen werden nun allein als ein System von abstrakten Dingen und der Relationen zwischen ihnen aufgefasst. So definiert man geometrische Objekte wie Punkt, Gerade und Ebene sowie die Lagebeziehungen zwischen ihnen ohne Rückgriff auf die Anschauung.

Für etwa 20 Jahre bildeten dann Fragen der Analysis und der mathematischen Physik ein neues Arbeitsfeld für D. Hilbert. Wichtige Ergebnisse dieser Forschungen waren der erste strenge Beweis des Dirichletschen Prinzips, der Ausbau der Variationsrechnung, die Begründung linearer Operatoren im unendlich dimensionalen Raum, dem späteren Hilbert-Raum, sowie vielfältige Anwendungen u. a. in der theoretischen Physik. Die Anwendungsgebiete reichten von der kinetischen Gastheorie bis zur Allgemeinen Relativitätstheorie.

Die letzte, um 1920 beginnende Schaffensperiode Hilberts war den Problemen der Grundlagen der Mathematik gewidmet, wie sie auch im Zusammenhang mit der axiomatischen Methode und der Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit von Axiomensystemen entstanden waren. Er entwickelte dabei mit seinen Schülern W. Ackermann bzw. P. Bernays u. a. einen allgemeinen Logikkalkül und eine Beweistheorie.

In den letzten Lebensjahren wurde es ruhig um D. Hilbert. Zwar hatte er nach seiner Emeritierung 1930 noch weitere vier Jahre Vorlesungen gehalten, doch machtlos musste er zusehen, wie die Nationalsozialisten nach ihrer Machtübernahme nahezu alle namhaften Mathematiker und Physiker aus Göttingen vertrieben und dieses Zentrum der mathematischen und physikalischen Forschung faktisch zerstörten. Hilbert starb am 14. 2. 1943. Nur wenige Freunde geleiteten ihn zur letzten Ruhe, darunter seine Frau Käthe. Die Worte auf dem Grabstein brachten noch einmal Hilberts Credo als Forscher zum Ausdruck: „*Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*“

(Karl-Heinz Schlote)

# Chronologie Mathematik

**um 580 v. Chr.:** Thales von Milet formuliert einige elementare, aber grundlegende geometrische Sätze und gibt erstmals Plausibilitätsbetrachtungen als Beweis.

**um 350 v. Chr.:** Eudoxos von Knidos verallgemeinert die Proportionenlehre auf inkommensurable Größen und begründet die Exhaustionsmethode.

**um 300 v. Chr.:** In 13 Büchern stellt Euklid in den „Elementen“ große Teile des mathematischen Wissens seiner Zeit deduktiv dar.

**um 240 v. Chr.:** In der „Methodenlehre“ entwickelt Archimedes eine übersichtliche Methode zur Flächen- und Volumenbestimmung bei krummlinigen Figuren und Körpern.

**um 250:** Diophant löst bestimmte und unbestimmte Gleichungen bis sechsten Grades und in mehreren Unbekannten. Er vollzieht dabei einen wichtigen Schritt zur algebraischen Symbolik.

**um 260:** Im Kommentar zur „Mathematik in neun Büchern“ verwendet Liu Hui erstmals negative Zahlen und Dezimalbrüche.

**um 815:** Al Khwarizmi vereinigt Elemente griechischen und indischen Wissens und baut eine Lösungstheorie für lineare und quadratische Gleichungen auf, die um 900 von Abu Kamil erweitert und verbessert wird.

**um 1020:** Ibn al Haitham diskutiert das Parallelenpostulat und baut eine Parallelenlehre auf.

**1247/48:** Unabhängig entwickeln Li Ye und Qin Jin shao Methoden zur Behandlung algebraischer Gleichungen und nichtlinearer Gleichungssysteme.

**1260:** N. at Tusi gibt eine von der Astronomie unabhängige Begründung der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

**1545:** In der „Ars magna“ publiziert G. Cardano die von N. Tartaglia 1535 bzw. L. Ferrari um 1542 gefundenen Formeln für die Lösung allgemeiner kubischer bzw. biquadratischer Gleichungen und beweist sie.

**1579:** Begründung der Goniometrie durch F. Vieta.

**um 1590:** J. Napier und J. Bürgi entdecken die Grundprinzipien der Logarithmen.

**1623:** W. Schickard baut die erste funktionstüchtige Rechenmaschine für die vier Grundrechenarten.

**1636:** P. de Fermat erkennt die Grundprinzipien der analytischen Geometrie.

**1637:** Im dritten Teil „La Géométrie“ des „Discours de la méthode“ entwickelt R. Descartes Grundelemente der späteren analytischen Geometrie.

**1654:** B. Pascal und P. de Fermat formulieren erste wichtige Erkenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**1664/66:** I. Newton entdeckt die Grundzüge der Fluxionsrechnung und versucht sie im Rahmen der Infinitesimalrechnung exakt zu begründen. Die Publikation erfolgt 1671.

**1668:** J. Gregory skizziert den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

**1669:** I. Newton verfasst eine weit entwickelte Reihenlehre.

**1675:** G. W. Leibniz erkennt die Grundideen der Infinitesimalmathematik.

**1684:** Die Grundregel der Differentialrechnung werden von G. W. Leibniz publiziert. 1686 folgen die Regeln der Integralrechnung.

**1713:** Posthum erscheint Jak. Bernoullis „Ars conjectandi“, eines der ersten Bücher zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, das u.a. das Gesetz der großen Zahlen enthält.

**1718:** „A Doctrine of Chance“, eine klassisches Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, von A. de Moivre erscheint.

**1727:** L. Euler initiiert das systematische Studium von verschiedenen Klassen von Differentialgleichungen. Er leistet nachfolgend selbst wichtige Beiträge dazu, die er in dem Buch zur Integralrechnung 1768/70 zusammenfasst.

**1744:** L. Euler löst zahlreiche Variationsprobleme und gibt die erste lehrbuchmäßige Darstellung der Theorie.

**1748:** In grundlegenden Lehrbüchern gibt L. Euler einen arithmetisch-algebraischen Aufbau der Differentialrechnung unter Hervorhebung des Funktionsbegriffs.

**1751:** L. Euler gelingt ein unvollständiger Beweis des eulerschen Polyedersatzes.

**1755:** J.-L. Lagrange teilt L. Euler eine neue allgemeine analytische Methode zur Lösung von Variationsproblemen mit.

**1763:** T. Bayes behandelt die Bestimmung bedingter Wahrscheinlichkeiten.

**1766:** J. H. Lambert studiert die Folgen aus der Negation des Parallelenpostulat und konstruiert eine nichteuklidische Trigonometrie, die er als widerspruchsfrei erklärt.

**1770:** L. Eulers einflussreiches Lehrbuch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ erscheint.

**1789 bis 1805:** P. S. Laplace publiziert die meisterhafte mathematische Himmelsmechanik in fünf Bänden, den „Traité de mécanique céleste“.

**1796:** Der junge C. F. Gauß entdeckt, dass auch das reguläre 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

**1797:** Lagrange gibt in der „Théorie des fonctions analytiques“ eine algebraische Behandlung der Infinitesimalrechnung ohne Grenzwertbegriff.

**1798:** G. Monge publiziert die Vorlesungen zur darstellenden Geometrie; mit der „Géométrie descriptive“ wird die darstellende Geometrie zur mathematischen Fachdisziplin.

**1799:** Gauß gibt den ersten vollständigen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

**1801:** Gauß veröffentlicht die „Disquisitiones arithmeticae“. Die Zahlentheorie wird eine selbstständige mathematische Disziplin.

**1807:** J. Fourier verfasst eine schrittmachende Abhandlung zur Wärmeausbreitung, die in die „Théorie analytique de la chaleur“ (1822) eingegangen ist und die Theorie der Fourierreihen begründet.

**1812:** P. S. Laplace fasst in der „Théorie analytique des probabilités“ die Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen; dies wird zum Standardwerk. Der zweiten Auflage von 1814 ist der „Essai philosophique sur les probabilités“ beigegeben; er vertritt die Theorie des klassischen Determinismus (sog. laplacescher Dämon).

**1817:** B. Bolzano formuliert den Zwischenwertsatz. Weitere Schriften geben strenge Definitionen für Stetigkeit und Reihenkonvergenz.

**1821:** Mit dem „Cours d'analyse algébrique“ beginnt A. L. Cauchy eine Serie von Lehrbüchern, die u. a. zur Verschärfung der Grundlagen der Analysis und zum Aufbau einer Theorie der komplexen Funktionen beitragen.

**1826:** N. I. Lobatschewski beginnt mit Vorträgen und Publikationen (1835, 1837, 1840, 1855) zur nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie. Gauß hatte zeitlich vorher analoge Ergebnisse gefunden, aber nicht publiziert. Unabhängig davon veröffentlicht János Bolyai 1832 bereits 1825 gefundene Ergebnisse zur nichteuklidischen Geometrie.

**1826:** N. H. Abel kann beweisen, dass die allgemeine algebraische Gleichung vom Grade  $n > 4$  nicht in Radikalen lösbar ist.

**1827:** Beginn des Wettstreites zwischen N. H. Abel und C. G. J. Jacobi um die Ausarbeitung einer Theorie der elliptischen Funktionen.

**1827:** Gauß publiziert eine allgemeine Flächentheorie unter dem Titel „Disquisitiones generales circa superficies curvas“.

**1832:** E. Galois skizziert am Vorabend des für ihn tödlichen Duells eine gruppentheoretisch begründete Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen.

**1833:** Ch. Babbage beginnt mit Konstruktionsversuchen für seine „analytical engine“, eine programmierte Rechenmaschine.

**1843:** W. R. Hamilton führt die Quaternionen ein, das erste abgeschlossene System hyperkomplexer Zahlen.

**1846:** Die Magisterdissertation von P. L. Tschebyschew zur Wahrscheinlichkeitsrechnung wird veröffentlicht. Nach seiner Berufung, 1855, nach St. Petersburg wird der vielseitige Mathematiker zu einem der Begründer der russischen mathematischen Schule.

**1847:** G. Boole beginnt mit „The Mathematical Analysis of Logic“ Veröffentlichungen zur symbolischen algebraischen Logik.

**1851:** B. Riemanns Dissertation zu den Grundlagen der Funktionentheorie. Es folgen 1854 die Habilitationsschrift über die Darstellbarkeit von Funktionen durch trigonometrische Reihen und der Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“.

**1856:** K. Weierstraß wird nach Berlin berufen. Seine Vorlesungen und Abhandlungen begründen eine strenge Grundlegung der Analysis, insbesondere der Theorie der analytischen Funktionen und der Variationsrechnung.

**1868:** E. Beltrami gibt ein Modell einer nichteuklidischen Geometrie an.

**1872:** In der Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ begründet R. Dedekind die Theorie der irrationalen Zahlen (sog. dedekindsche Schnitte).

**1872:** Das sog. „Erlanger Programm“ von F. Klein „Über neuere geometrische Forschungen“ klassifiziert die Fülle geometrischer Methoden.

**1874:** G. Cantor beginnt mit Studien und Publikationen zur Mengenlehre. Er beweist u. a. Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen. 1879–1884 folgen sechs Arbeiten „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ mit der Theorie der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen.

**1885:** H. Poincaré beginnt mit Publikationen zur Topologie.

**1889:** G. Peano veröffentlicht das Axiomensystem für natürliche Zahlen.

**1899:** Die erste Auflage der „Grundlagen der Geometrie“ von D. Hilbert erscheint: Axiomatisierung der Geometrie.

**1900:** D. Hilberts berühmter Vortrag „Mathematische Probleme“ auf dem Mathematikerkongress in Paris gibt eine Prognose auf zentrale Fragen der Entwicklung der Mathematik.

**1900:** Axiomatischer Aufbau des Zahlensystems durch D. Hilbert

**1904:** Auswahlaxiom der Mengenlehre von E. Zermelo zum Beweis des Wohlordnungssatzes benutzt

**1906:** M. Fréchet begründet die Theorie der metrischen Räume.

**1909:** Erstes Axiomensystem der Mengenlehre von E. Zermelo

**1910:** E. Steinitz gibt in seiner „Algebraischen Theorie der Körper“ eine abstrakte Körpertheorie.

**1913:** In „Die Idee der Riemannschen Fläche“ legt H. Weyl die Basis für eine allgemeine Mannigfaltigkeitslehre.

**1920:** E. Noether beginnt mit Veröffentlichungen zur Idealtheorie und 1927 zur nichtkommutativen Algebra.

**1930/31:** B. L. van der Waerden publiziert die zweibändige „Moderne Algebra“.

**1931:** Unvollständigkeitssätze von K. Gödel

**1933:** A. N. Kolmogorow publiziert „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“.

**1936:** Konstruktion der ersten programmgesteuerten Rechenmaschine Z 1 durch K. Zuse

**1946:** A. Weil beginnt mit dem Aufbau einer abstrakten algebraischen Geometrie.

**1963:** P. J. Cohen zeigt die Nichtbeweisbarkeit der Kontinuumshypothese.

(Karl-Heinz Schlote; Hans Wußing)

# An den Schwellen der Jahrhunderte

## Ereignisse auf dem Gebiet der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik, die 1999, 2000 oder 2001 um volle Jahrhunderte zurückliegen

–**500** Pythagoras von Samos (etwa 580 bis etwa **500** v. Chr.); griechischer Mathematiker und Philosoph; gründete den Geheimbund der Pythagoreer und forschte mit ihm u.a. zur Teilbarkeit, zu Primzahlen, zu Grundlagen der Akustik; Zahlen wurden als Urprinzip der Schöpfung angesehen; nach Pythagoras benannt ist der berühmte Lehrsatz über die Seiten rechtwinkliger Dreiecke ( $a^2 + b^2 = c^2$ ).

–**300** Euklid von Alexandria (etwa 365 bis etwa **300** v. Chr.); griechischer Mathematiker; sein Werk „*Elemente*“ stellte die erste systematische Zusammenfassung mathematischen Wissens auf der Basis von Definitionen und Beweisen dar und machte damit die Mathematik zu einer Wissenschaft.

**499** Aryabhata (geb. 476); indischer Mathematiker; verfasste die **499** erschienene „*Aryabhatiya*“, ein Lehrbuch in Versform; darin befinden sich bereits Grundzüge des dekadischen Systems, trigonometrische Tafeln und Näherungsverfahren für Gleichungen höheren Grades.

**999** Gerbert d'Aurillac (etwa 940 bis 1002), französischer Theologe und Mathematiker; verfasste Lehrbücher über Rechnen mit dem Abakus und über Geometrie; als Lehrer für Mathematik an den Hof von Kaiser Otto III. berufen; **999** zum Papst gewählt (Sylvester II.).

**1201** Nasir ed-din at Tūsī (**1201** bis 1274); arabischer Mathematiker und Astronom; stellte die Kenntnisse über die Trigonometrie (u.a. Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke, Beweis des Sinussatzes) losgelöst von der Astronomie als selbstständige mathematische Disziplin dar.

**1401** Nicolaus Cusanus (**1401** bis 1464); auch Nikolaus von Kues (an der Mosel); deutscher Theologe (Kardinal und Bischof) und Mathematiker; fasste Kreis als Vieleck mit unendlicher Eckzahl auf, fand Näherungswerte für Pi (3,1423) mit Hilfe von Rekursionsformel.

**1500** Niccolò Tartaglia (etwa **1500** bis 1557); italienischer Rechenmeister und Mathematiker; fand Lösungsverfahren für kubische Gleichungen (von Cardano veröffentlicht und nach ihm benannt).

**1500** Christoff Rudolph (**1500** bis 1552 (?)); böhmischer Rechenmeister; schuf weit verbreitete Rechenbücher (Coß genannt), führte darin zahlreiche noch heute gebräuchliche Symbole ein (Quadrate, Kuben, Wurzeln); benutzte bereits Dezimalbrüche (er schrieb 4/56 für 4,56).

**1501** Geronimo (Girolamo) Cardano (24. 9. **1501** bis 1576); italienischer Mathematiker; veröffentlichte Verfahren zur Lösung von Gleichungen dritten und höheren Grades („Cardanische Formel“), erkannte schon komplexe Lösungen an und führte (später nach Viëta benannte) Wurzelsätze an.

**1600** Simon Stevin (1548 bis 1620); niederländischer Baumeister und Ingenieur; gilt als Begründer der Lehre von den Dezimalbrüchen, forderte dezimale Teilungen bei Einheiten; erbaute **1600** einen mit Hilfe von Segeln angetriebenen Wagen, der eine Geschwindigkeit von mehr als 30 km/h erreichte.

**1600** Jost Bürgi (1552 bis 1632); Schweizer Uhrmacher und Mathematiker; baute kunstvolle astronomische Geräte; schuf Regeln für das Rechnen mit Dezimalbrüchen; berechnete **1600** die ersten Logarithmentafeln.

**1601** Johannes Kepler (1571 bis 1630); deutscher Mathematiker und Astronom; wurde **1601** „kaiserlicher Mathematiker“ in Prag; fand nach langwierigen Berechnungen elliptische Form der Planetenbahnen (Keplersche Gesetze); benutzte infinitesimale Methoden zur Berechnung von Flächen und Volumen; entwickelte Tafeln über Standorte der Himmelskörper.

**1601** Pierre de Fermat (17. 8. **1601** bis 1665); französischer Mathematiker; eigentlicher Begründer der Zahlentheorie (sein berühmter Satz „ $a^n + b^n = c^n$  ist für  $n$  größer 2 nicht erfüllbar“ wurde erst vor wenigen Jahren bewiesen); zusammen mit Pascal schuf er die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**1601** Tycho Brahe (1546 bis 24. 10. **1601**); dänischer Himmelsforscher; entdeckte 1572 eine Nova im Sternbild Kassiopeia; seit 1599 Hofastronom bei Kaiser Rudolf II. in Prag; erarbeitete auf Grund regelmäßiger Sternbeobachtungen umfassenden Fixsternkatalog und Tabellen mit Standorten der Planeten (genutzt von Kepler).

**1700** Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716); deutscher Mathematiker, Historiker und Philosoph; erfand verbesserte Rechenmaschine, begründete 1675 – parallel zu Newton und unabhängig von ihm – die Infinitesimalrechnung; führte zahlreiche Symbole und das Dualsystem ein; erreichte am 11. 7. **1700** die Gründung der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, deren erster Präsident er wurde.

**1701** Isaac Newton (1643 bis 1727); britischer Mathematiker und Naturwissenschaftler; begründete die Infinitesimalrechnung – parallel zu Leibniz und unabhängig von ihm; entdeckte die Zerlegung des Lichts in Spektralfarben; begründete die klassische Physik (Gravitationsgesetz); übersiedelte **1701** nach London und wurde dort 1703 Präsident der Royal Society.

**1701** Anders Celsius (27. 11. **1701** bis 1744); schwedischer Physiker; zeigte Zusammenhang zwischen Polarlichtern und Magnetfeld der Erde; schuf die heute noch gebräuchliche Temperaturskala (100° zwischen Schmelzpunkt des Eises und Siedepunkte des Wassers).

**1799** Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855); deutscher Mathematiker mit fundamentalen Arbeiten auf vielen Gebieten der Mathematik; legte **1799** in seiner Dissertation einen strengen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra (Gleichungen n-ten Grades haben im Bereich der komplexen Zahlen n Lösungen) vor; entdeckte 1796 die Konstruierbarkeit bestimmter regelmäßiger n-Ecke (Siebzehneck) mit Zirkel und Lineal; führte Zahlenkongruenzen ein, schuf Werk über Fehlertheorie, erfand zusammen mit Wilhelm Weber den elektromagnetischen Telegrafen.

**1799** Jacques-Lienne de Montgolfier (1745 bis 1. 8. **1799**); erfand gemeinsam mit seinem Bruder Joseph den Heißluftballon; 1783 gelang mit einem solchen Ballon der erste erfolgreiche Aufstieg.

**1800** Friedrich Wilhelm Herschel (1738 bis 1822); deutsch-britischer Astronom; entdeckte **1800** bei der Zerlegung des Sonnenlichts in die Spektralfarben die Infrarotstrahlung; schon 1781 hatte er den Planeten Uranus und später die Monde dieses Planeten und des Saturn entdeckt.

**1800** Friedrich Wöhler (31. 7. **1800** bis 1882); deutscher Chemiker; entdeckte die Elemente Aluminium und Beryllium; stellte als erster organische Stoffe (Harnstoff) aus anorganischen Stoffen her und verband anorganische und organische Chemie.

**1800** Pierre Simon Laplace (1749 bis 1827); französischer Mathematiker, Astronom und Politiker; begann **1799** mit der Veröffentlichung seiner „Himmelsmechanik“; am 29. 11. **1800** führte eine Kommission unter seiner Leitung die Einheit „Meter“ ein; veröffentlichte Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einer ersten Definition für diesen Begriff.

**1800** Alessandro Volta (1745 bis 1827); italienischer Naturforscher; konstruierte **1800** die „Voltasche Säule“, die erste brauchbare (stetige) Stromquelle und damit die Voraussetzung für die Elektrizitätslehre; nach ihm benannt ist die Einheit der elektrischen Spannung.

**1801** Giuseppe Piazzi (1746 bis 1826); italienischer Astronom; entdeckte am 1. 1. **1801** den kleinen Planeten Ceres, verlor ihn jedoch nach 40 Tagen Beobachtung aus dem Blickfeld; aus wenigen Daten berechnete Gauß nach einer von ihm entwickelten Methode die Bahn, so dass die Ceres Ende **1801** wieder aufgefunden wurde.

**1801** Franz Karl Achard (1753 bis 1821); deutscher Chemiker; fand 1796 ein Verfahren zur Gewinnung von Zucker aus Runkelrüben und baute **1801** die erste Zuckerrübenfabrik auf.

**1801** Robert Fulton (1765 bis 1815); US-amerikanischer Ingenieur; stellte am 3. 6. **1801** im Hafen von Brest das Modell eines Unterseebootes („Nautilus“) vor und baute 1807 das erste brauchbare Dampfschiff.

**1899** Ernst Haeckel (1834 bis 1919); deutscher Naturforscher und Philosoph; veröffentlichte **1899** sein Werk „*Die Welträtsel*“, worin er die Lehre Darwins von der natürlichen Entwicklung der Lebewesen darlegte und verteidigte.

**1899** Sophus Lie (1842 bis 18. 2. **1899**); norwegischer Mathematiker; würdigte und verbreitete die Arbeiten von Galois (1811 bis 1832); arbeitete über Differentialgleichungen und über Gruppentheorie; war von 1886 bis 1898 Professor an der Universität Leipzig.

**1899** Guglielmo Marconi (1874 bis 1937); italienischer Ingenieur und Physiker; führte Untersuchungen über elektromagnetische Wellen durch; am 27. 3. **1899** gelang ihm die erste drahtlose Telegrafieübertragung zwischen England und Frankreich; 1909 erhielt er den Nobelpreis für Physik.

**1899** Robert Wilhelm Bunsen (1811 bis 16. 8. **1899**); deutscher Chemiker; Entdecker der Elemente Rubidium und Cäsium, Mitbegründer der Spektralanalyse; Schöpfer des nach ihm benannten „Bunsenbrenners“.

**1900** Max Planck (1858 bis 1947); deutscher Physiker; veröffentlichte nach Arbeiten über Strahlungen **1900** seine Quantentheorie (Plancksches Wirkungsquantum), in der er mit Vorstellungen der klassischen Physik brach; erhielt 1918 den Nobelpreis für Physik.

**1900** Auf der Pariser Weltausstellung wurden die neuesten technischen Errungenschaften vorgestellt (u.a. mit Ton gekoppelte Filmprojektoren und Großleinwände); Bewunderung erregte der ganz aus Stahl erbaute Eiffelturm, seither ein Wahrzeichen der Hauptstadt Frankreichs.

**1900** David Hilbert (1862 bis 1943); deutsche Mathematiker; befasste sich u.a. mit Integralgleichungen und dem axiomatischen Aufbau der Mathematik (1899 „Grundlagen der Geometrie“); **1900** benannte er in seinem Referat auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress in Paris Grundprobleme der mathematischen Forschung für das 20. Jahrhundert (s. Einleitungstext).

**1900** Gottlieb Daimler (1834 bis 6. 3. **1900**); deutscher Ingenieur und Industrieller; entwickelte zusammen mit Maybach die berühmten „Daimler-Autos“; stellte 1885 das erste Motorrad und 1886 das erste Benzinauto vor.

**1900** Frédéric Joliot-Curie (19. 3. **1900** bis 1958); französischer Kernphysiker; erzeugte gemeinsam mit seiner Frau Irène (Tochter von Marie Curie) instabile Isotope und erforschte ihre Nutzung in Biochemie und Medizin; beide erhielten 1935 den Nobelpreis für Chemie.

**1901** Charles Hermite (1822 bis 14. 1. **1901**); französischer Mathematiker, Professor an der Sorbonne; führender Vertreter der Analysis in Frankreich; bewies 1873 die Transzendenz der Zahl e.

**1901** Enrico Fermi (29. 9. **1901** bis 1954); italienischer Physiker; forschte auf dem Gebiet der Kernphysik; erhielt 1938 den Nobelpreis für Physik; 1942 wurde in Chicago der erste (unter seiner Leitung erbaute) Kernreaktor in Betrieb genommen.

**1901** Wilhelm Conrad Röntgen (1845 bis 1923); deutscher Physiker; entdeckte 1895 kurzwellige Strahlen mit hohem Durchdringungsvermögen (von ihm X-Strahlen, später nach ihm Röntgenstrahlen genannt); erhielt **1901** den in diesem Jahr erstmals verliehenen Nobelpreis für Physik.

(Karlheinz Lehmann)

# Chronologie Rechenhilfsmittel

**4. Jahrht. v. Chr. – um 300 v. Chr.:** Das babylonische Zahlbezeichnungssystem mit der Basis 60 (das noch in unserer Winkel- und Zeitmessung fortlebt) gelangt in einem langen Reifungsprozess mit der Erfindung der Null zum Abschluss.

**Um 300 v. Chr. – um 1200:** Im römischen Reich, später in ganz Europa, ist der Abacus das allgemein genutzte Rechenhilfsmittel. (Unabhängig davon ist er zu nicht genau fixierbaren Zeiten auch in fast allen ostasiatischen Ländern in Gebrauch gekommen.)

**7. Jh.:** Das Positionssystem mit der Basis 10 wird in Indien entwickelt, breitet sich im 9. Jh. in den islamischen Ländern aus und kommt ab dem Ende des 10. Jhs. auf verschiedenen Wegen nach Europa.

**13.–16. Jh.:** Das schriftliche („algorithmische“) Rechnen setzt sich allmählich in ganz Europa (außer Rußland) gegen das Abacusrechnen durch. Großen Anteil daran haben Rechenmeister wie Adam RIES mit ihren Rechenschulen und Rechenbüchern.

**1614:** Der schottische Edelmann John NEPER (oder Napier) veröffentlicht seine Logarithmentafel – die erste der Welt. Im Titel erscheint das von ihm erfundene Wort *Logarithmen*.

**1620–1624:** Logarithmentafeln von Henry BRIGGS (zur Basis 10), Jost BÜRGI (Basis näherungsweise e) und Johannes KEPLER.

**1624–1650:** Rechenstäbe von Edmond GUNTER, William OUGHTRED, Seth PARTRIDGE und Edmund WINGATE entwickeln sich aus der Urform einer einzelnen logarithmischen Skala (von der die Strecken mit dem Zirkel abzugreifen sind) im Wesentlichen bis zu ihrer endgültigen Form.

**Um 1623:** Der Tübinger Professor für Mathematik, Astronomie und Hebräisch Wilhelm SCHICKARD (auch Schickhardt) baut die erste Rechenmaschine, die jedoch in den Wirren des dreißigjährigen Krieges verbrennt.

**1644:** Blaise PASCAL baut in Frankreich die erste erhalten gebliebene Rechenmaschine für Addition und Subtraktion und erhält 1649 ein königliches Privileg für die Herstellung (9 Exemplare bis heute erhalten).

**1673:** Gottfried Wilhelm LEIBNIZ führt die von ihm entwickelte 4-Spezies-Rechenmaschine, die auf dem Staffelwalzenprinzip beruht, jedoch technisch noch nicht ausgereift ist, der Londoner Royal Society vor (1694 mit Hilfe des Pariser Mechanikers OLIVIER verbessert).

**1703:** Die erste Abhandlung von LEIBNIZ über das Rechnen im Binärsystem erscheint. LEIBNIZ entwickelt auch die Idee des Sprossenrades und einer binär arbeitenden Maschine (1679), setzt jedoch beides nicht in die Tat um.

**1709:** Giovanni POLENI erfindet und beschreibt unabhängig von LEIBNIZ das Sprossenrad.

**18. Jh.:** Bau funktionstüchtiger Rechenmaschinen u. a. von Antoni BRAUN (Wien 1726), Philipp Matthäus HAHN (Echterdingen 1770), J. H. MÜLLER (Darmstadt 1783).

Elemente der späteren programmgesteuerten Rechentechnik werden in Gestalt von Lochstreifen- und Stiftwalzensteuerungen komplizierter Abläufe in der Textilherstellung und in den Musik- und Unterhaltungsautomaten entwickelt.

**1793:** Die meistaufgelegten Logarithmentafeln aller Zeiten (bis Mitte 20. Jh. über 100 Auflagen) von Georg V. VEGA erscheinen erstmals. Etwa zur gleichen Zeit propagiert James WATT in England den dort als „Soho rule“ bezeichneten Rechenstab als universelles Rechengerät des Ingenieurs.

**1812:** Charles BABBAGE fasst den Plan, Zahlentafeln durch eine programmgesteuerte mechanische Maschine berechnen zu lassen, um vor Rechenfehlern (!) sicher zu sein.

**1818:** Charles Xavier THOMAS beginnt in Paris mit der Serienproduktion mechanischer Tischrechenmaschinen (bis 1878 etwa 1500 Stück).

**1822:** Die von BABBAGE gebaute Differenzenmaschine zur Berechnung der Funktionswerte von Polynomen dritten Grades funktioniert und bringt ihm finanzielle Unterstützung durch die Royal Society für weitere Projekte; langjährige Arbeit an einer universell verwendbaren „analytischen Maschine“ führte allerdings nicht zum Erfolg.

**1840–1900:** Blütezeit grafischer Rechenmethoden (Nomographie), besonders in Frankreich entwickelt.

Numerische Mathematik (einschließlich Fehlerrechnung) beginnt sich als eigener Zweig der Mathematik herauszubilden.

**1878:** Beginn der Fertigung von Rechenmaschinen in Glashütte

**1882:** Hermann HOLLERITH vollendet seine Tabellier- und Sortiermaschine für Lochkarten. 1890 werden 45 Exemplare erfolgreich bei der 11. US-amerikanischen Volkszählung eingesetzt.

**1887:** Beginn der industriellen Großproduktion mechanischer Rechenmaschinen in den USA (Felt)

**1889:** Firma Burroughs produziert die ersten mechanischen Rechenmaschinen mit mechanischem Druckwerk.

**1896:** HOLLERITH gründet die Tabulating Machine Company, aus der 1924 die Firma IBM hervorgeht.

**1909:** Percy E. LUDGATE publiziert unabhängig von BABBAGE die Idee einer universell programmierbaren Rechenmaschine, führt dabei bedingte Sprünge und das Prinzip des Drei-Adress-Befehls ein

**1910:** H. V. LIEBEN erfindet die Elektronenröhre mit Steuergitter. P. EHRENFEST erkennt die Anwendbarkeit der Aussagenlogik auf die Konstruktion und Untersuchung elektrischer Schaltkreise.

**1932:** Der Mathematiker Wilhelm CAUER löst an der Univ. Göttingen lineare Gleichungssystem mit bis zu 10 Variablen mittels speziell dafür konstruierter Analog-Rechenanlagen.

**1936:** Konrad ZUSE beginnt in der Wohnung seiner Eltern mit der Konstruktion programmgesteuerter Rechenmaschinen auf Relaisbasis.

**1936/37:** Die Mathematiker Alan TURING und Emil POST definieren unabhängig voneinander den Begriff der algorithmischen Berechenbarkeit mit Hilfe einer universellen programmierbaren idealen Maschine und beweisen damit die Existenz algorithmisch unlösbarer Aufgaben; Beginn der theoretischen Informatik.

**1937:** Beginn der Arbeiten an der auf Relaisbasis arbeitenden programmgesteuerten Rechenmaschine MARK I bei IBM unter der Leitung von Howard AIKEN.

**1938:** Der von ZUSE fertiggestellte Rechner **Z1** verwirklicht erstmals das Gleitkomma-Prinzip.

**1941:** Rechenmaschine **Z3** (ZUSE) nimmt den Betrieb auf (1944 durch Bombenangriff zerstört).

**1942:** John W. MAUCHLY und John P. ECKERT beginnen mit der Arbeit an einem Rechner ENIAC auf Röhrenbasis. Etwa gleichzeitig übergibt Bell Telephone den von G. STIEBITZ konstruierten Relaisrechner.

**1943:** Der Großrechner COLOSSUS (NEWMAN, TURING) in Großbritannien wird für die Dechiffrierung des Funkverkehrs der faschistischen Wehrmacht eingesetzt. Das ist die erste wesentliche nichtnumerische Anwendung einer programmgesteuerten Rechanlage.

**1944:** MARK I (Harvard-Universität) wird im Dauerbetrieb für ballistische Rechnungen eingesetzt. Der Mathematiker John V. NEUMANN entwickelt das Konzept eines Rechners mit einheitlichem Speicher für Programm und Daten; 1949 realisiert.

**1945/46:** ZUSE entwickelt mit seinem *Plankalkül* eine nicht zur Anwendung gekommene Programmiersprache, die erstmals nicht ausschließlich am numerischen Rechnen orientiert ist.

**1946:** ENIAC geht in Betrieb.

**1947:** Beginn der Arbeiten an der Transistortechnik.

**1949:** Rechner EDSAC (Großbritannien) arbeitet als erster mit einheitlichem Speicher für Programm und Daten.

**1951:** Die technische Realisierung des Flächentransistors (SHOCKLEY, SPARKS, TEAL) revolutioniert die Elektronik.

**1952:** Erste numerisch gesteuerte Werkzeugmaschine (mit Röhrenschaltung)

**1954:** Erste problemorientierte Programmiersprache FORTRAN (John BACKUS). Beginn des Einsatzes von Computern zur Formelmanipulation (automatisches Differenzieren).

**1954:** TRADIC erster Rechner der „2. Generation“ (Transistor)

**1955:** In den USA bieten 24 Firmen insgesamt 38 Typen von Computern an.

**1956:** Disketten werden als Speichermedien eingeführt, kommen aber erst 1970 als „Floppy Disk“ für den allgemeinen Gebrauch in den Handel.

**1957:** Die erste sowjet. Großrechanlage BESM 1 führt die Berechnungen für den Start des ersten Sputniks durch.

**1958:** Problemorientierte Sprache ALGOL 58

**1960:** Unter dem Einfluss der zunehmenden Computernutzung beginnt die (ursprünglich auf Probleme der Logik orientierte) Algorithmentheorie sich zur Komplexitätstheorie zu entwickeln. Begriffe wie *in Realzeit*, *linearer Zeit*, *polynomialer Zeit berechenbar* entstehen.

**1965:** Beginn des Einsatzes integrierter Schaltkreise (Chips)

**1960–77:** Durch grafische Datenverarbeitung (etwa ab 1960) und Textverarbeitung (etwa ab 1975) verliert der Computer zunehmend den Charakter eines „Rechengerätes“ (heute weniger als 2 % numerische Rechnungen).

**1967:** Die ersten elektronischen Taschenrechner kommen auf den Markt.

**1968:** Die Kopplung von Rechner und Bildschirm begründet eine neue Ära in der Kommunikation zwischen Mensch und Computer. Das Wort *Informatik* tritt seinen Siegeszug an. Weltweit beginnt die Aufspaltung der Computerfirmen in Hardware- und Software-Produzenten.

**1970:** Sprache PASCAL (N. WIRTH)

**Um 1971:** Übergang zu hochintegrierten Chips, die ihrerseits nur noch mit Computerhilfe konstruiert werden können.

**1972:** Sprache PROLOG (A. COLMEAUER)

**1973:** Beginn der Datenfernübertragung.

**1975:** Bill GATES und Paul ALLEN gründen Microsoft.

**1976:** Gründung der Firma Macintosh (Apple). Beweis eines lange ungelösten mathematischen Problems (Vierfarbenvermutung) durch systematisches Durchmustern einer großen Zahl von Möglichkeiten mittels Computer

**1978:** Erste Personalcomputer (Apple) gebaut.

**1980:** Erstes kommerzielles Programmpaket zur Lösung vielfältiger mathematischer Aufgaben: MAPLE

**1981:** Betriebssystem MS-DOS kommt auf den Markt

**1984:** In Berlin wird das Konrad-ZUSE-Zentrum für Informationstechnik gegründet.

**1985:** Erstes Betriebssystem der Windows-Serie

**1988:** Anfänge des Internet

**1991:** Der finnische Student Linus TORVALDS beginnt mit der Arbeit am nichtkommerziellen Betriebssystem LINUX

**1992:** Portable Computer (notebook)

**1993:** Pentium-Processor

(Peter Schreiber)

# Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung (Hans Wußing)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und Isaac Newton (1642–1727) gelten mit Recht als jene herausragenden Gelehrten, denen die Infinitesimalmathematik zu danken ist. Aber es ist ahistorisch und wissenschaftshistorisch falsch, diese Tatsache mit der Vorstellung zu verbinden, als hätten Leibniz und Newton sozusagen im Vorbeigehen die Differential- und Integralrechnung erfunden. Ganz im Gegenteil: Die Infinitesimalrechnung hat eine lange und komplizierte Vor- und Entstehungsgeschichte, nicht zuletzt deswegen, weil mit der Infinitesimalmathematik ein ganz neuer Typ mathematischen Denkens entwickelt werden mußte, der den schwierigen begrifflichen Umgang mit Grenzwerten und dem mathematischen Unendlichen erforderte.

## 1 Frühgeschichte infinitesimaler Methoden

Bereits die Antike weist Anfänge infinitesimalen Denkens, ja sogar echte Infinitesimalmathematik auf. Demokritos von Abdera (460–371 v. u. Z.) soll das Volumen eines Kegels gefunden haben, indem er sich den Körper durch Ebenen parallel zum Grundkreis zerschnitt und dachte (s. Fig. 1). Es entstehen dann dünne Fast-Zylinder, die immer genauer die Zylinderform annehmen, je mehr Schnittebenen verwendet werden. Archimedes von Syrakus (ca. 287–212 v. u. Z.), der herausragende Mathematiker und Physiker der Antike, lobte Demokritos und seine Methode und trug selbst Beachtliches zur Herausbildung infinitesimaler Methoden bei, als er fand, daß das Parabelsegment quadrierbar ist.

Die Frage, welche Flächen quadrierbar sind, stellt eines der Zentralprobleme der antiken Mathematik dar. Eine Fläche heißt quadrierbar, wenn sie sich ausschließlich unter Verwendung der Hilfsmittel Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat verwandeln läßt. Offenbar sind alle geradlinig begrenzten Flächen quadrierbar, aber nicht nur solche, sondern auch einige krummlinig begrenzte Flächen. Besonders schön sind die sog. Möndchen des Hippokrates von Chios (2. Hälfte des 5. Jh. v. u. Z.); er vermochte fünf Typen solcher quadrierbarer Kreisbogenzweiecke anzugeben (s. Fig. 2). Nun gelang Archimedes die Quadratur des Parabelsegmentes, indem er dem Segment eine Folge von Dreiecken einbeschrieb; denkt man sich den Prozeß bis ins Unendliche fortgesetzt, so wird der Flächeninhalt des Segmentes „ausgeschöpft“ (s. Fig. 3). Beim Beweis wurde Archimedes auf eine unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten  $\frac{1}{4}$  geführt. Diese Reihe konvergiert mit der Summe  $\frac{4}{3}$ , und Archimedes konnte dies streng beweisen. Unschwer erkennt man bei der Parabelquadratur die Ähnlichkeit mit den Methoden der Integralrechnung.

Wie schwierig der Umgang mit Grenzübergängen war, sieht man auch an den Paradoxien des antiken Mathematikers und Philosophen Zenon von Elea (ca. 495–ca. 430 v. u. Z.). Eines seiner Paradoxa ist der Wettlauf zwischen einer Schildkröte und dem legendären Helden Achilles, der auch besonders schnell laufen konnte. Um den Wettlauf einigermaßen fair zu gestalten, erhält die langsame Schildkröte einen Vorsprung. Aber immer kommt Achilles nur dort an, wo die Schildkröte schon gewesen ist: Achilles kann die Schildkröte niemals einholen. Der Trugschluß beruht, wie heute erkennen, darauf, daß eine Summe von unendlich vielen endlichen Größen sehr wohl endlich sein kann. Das ist die erstaunliche Aussage, die sich mit dem Begriff der Konvergenz verbindet.

## 2 Entstehungsgeschichte der Infinitesimalrechnung

Als während der Renaissance in Europa im 15. und 16. Jh. die Schriften der Antike wieder verfügbar wurden, erregten auch die Abhandlungen des Archimedes höchste Bewunderung, zumal sich neue Probleme aufdrängten, die auf die Berechnung von komplizierten Flächen- und Rauminhalten führten.

So knüpfte etwa der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (1571–1630) bewusst an Archimedes an. Das zweite Keplersche Gesetz erfordert die Berechnung von Flächenstücken innerhalb von Ellipsen, die nur durch Methoden zu bewältigen war, die wir heute der Integralrechnung zurechnen. Kepler fand auch gute Näherungen für die Kreisfläche, indem er sich den Kreis in lauter gleichschenklige Dreiecke mit der Spitze im Mittelpunkt zerlegt dachte (s. Fig. 4). Analog dachte er sich eine Kugel aus lauter Kegeln mit kleiner Grundfläche zusammengesetzt.

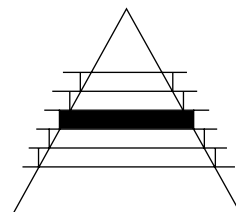


Fig. 1 Zur Bestimmung des Kegelvolumens durch Demokritos

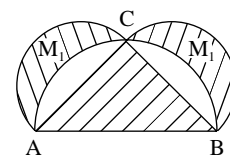


Fig. 2 Ein Typ von Möndchen des Hippokrates. Die Summe der Möndchen  $M_1$  und  $M_2$  ist flächengleich dem Dreieck ABC

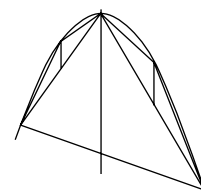


Fig. 3 Zur Quadratur des Parabelsegmentes durch Archimedes

Im Mittelalter und während der Renaissance bestand ein immer wieder auftretendes Problem in der Bestimmung des Rauminhaltes von Fässern; Fässer dienten als Transportbehälter für Güter aller Art. Während die sog. Visierer praktische, wenn auch ungenaue Faustregeln zur Inhaltsbestimmung besaßen – man verwendete einen Visierstab mit einer Eichung, der ins Spundloch gesteckt wurde –, entwickelte Kepler rechnerische Näherungsverfahren und veröffentlichte sie 1615 in der Schrift „*Nova stereometria doliorum vinariorum*“ (Neue Raummeßkunst der Weinfässer), der er 1616 in deutscher Sprache ein für das tägliche Leben gedachtes Visierbüchlein unter dem Titel „*Auszug aus der Uralten Messekunst Archimedes ...*“ folgen ließ.

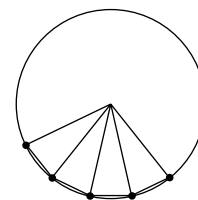


Fig. 4 Kreisflächenberechnung durch Kepler

Auch methodologisch hat Kepler eine neue, wenn auch an Archimedes anknüpfende Etappe bei der Herausbildung der Infinitesimalmathematik eingeleitet; man spricht direkt von der Periode der Infinitesimalgeometrie. Ein Galilei-Schüler, Bonaventura Cavalieri (1598–1647), hat vielleicht am deutlichsten die in der Keplerschen Infinitesimalgeometrie enthaltenen Möglichkeiten erkannt.

Auch während des Mittelalters hatten, freilich in theoretisch-philosophischer Einhüllung, Fragen nach der unbegrenzten Teilbarkeit eine große Rolle gespielt. Aus dem griechischen Wort „*atomis*“ (unteilbar) wurde durch Übertragung ins Lateinische „*indivisibilis*“ (nicht teilbar). In der naturphilosophischen Bedeutung des Wortes als kleinster Teil des Kontinuums dürfte das Fachwort „*Indivisible*“ im 14. Jh. von dem englischen Scholastiker Thomas Bradwardine (ca. 1290–1349) geprägt worden sein. Auch bei Kepler sind Ideenverbindungen zum Begriff der Indivisibeln nachweisbar. Gelegentlich spricht er davon, daß bewegte Flächen Körper erzeugen. Die Flächen nehmen sozusagen die Rolle der Unteilbaren hinsichtlich des Körpers ein.

Diese und andere Ansätze hat Cavalieri zu systematisieren versucht. Im Jahre 1635 erschien sein Buch „*Geometria indivisibilibus continuorum ...*“ (Geometrie der kontinuierlichen Indivisibeln, nach einer gewissen neuen Methode vorgebracht); 1653 folgte eine verbesserte Ausgabe. Trotz aller seiner Bemühungen ist das Buch schwer verständlich, aus Mangel an begrifflicher Klarheit. Er selbst hat deswegen einen Vergleich gezogen: Ebene Figuren sind aufzufassen als ein Gewebe aus parallelen Fäden. Körper sind wie Bücher, die aus zueinander parallelen Flächen bestehen. Wir könnten sagen: Die Indivisibeln sind unendlich dünne Gebilde, die eine um 1 kleinere Dimension besitzen als das von ihnen durch fließende Bewegung in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze. Trotz begrifflicher Schwierigkeiten konnte Cavalieri mit der Indivisibelnmethode immerhin bedeutende Fortschritte bei der Berechnung der Potenzfunktionen  $y = x^n$ ,  $n > 0$ , ganz, bis zum Exponenten 9; dies entspricht unseren Integrationen

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

Seine Schlußweisen beruhen auf einem „Prinzip“, jedoch weicht das historisch echte Cavalierische Prinzip erheblich von der Fassung ab, die man im Schulunterricht zu verwenden pflegt. Immerhin aber läßt sie sich in diesem Sinne interpretieren. Vom historischen Standpunkt ist es nun überaus interessant, daß sich bei Cavalieri jene zwei Grundideen finden, die zu den unterschiedlichen Ausprägungen der Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz führen sollten. Die Idee des Fließens wird bei Newton umgesetzt in die sog. Fluxionsrechnung (lat. *fluo, fluxi* – fließen, strömen). Die Idee der Gesamtheit wird von Leibniz in den Vordergrund gerückt werden: Cavalieri gebraucht die Wendung „*omnes liniae figurae*“ (die „Gesamtheit der Geraden der Figur“ bildet die Fläche), von hier ging Leibniz den Weg zur „Summe aller Linien“. Aus dem stilisierten S von Summe wurde das Integralzeichen.

### 3 Herausbildung der Infinitesimalmathematik

Um die Mitte des 17. Jhs. trat in der Entwicklungsgeschichte der Infinitesimalmathematik eine Wendung ein. Statt für jeden einzelnen Fall einer Flächenbestimmung oder für die Bestimmung einer Tangente an eine Kurve im Einzelfall besondere Kunstgriffe zu entwickeln, suchte man nach allgemeinen Methoden, die stets zum Ziel führen sollten. Ein großer Fortschritt wurde durch die Arithmetisierung der Indivisibelnmethode erreicht. So konnte der Engländer John Wallis (1616–1703), der auch als Arzt und Theologe hervorgetreten ist, alle Flächeninhaltsbestimmungen leisten, die wie heute mit den Formeln

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} \quad \text{für alle } m \neq -1 \text{ wiedergeben.}$$

Das Archimedische Verfahren wurde verallgemeinert zur Exhaustionsmethode (lat. *exhaurire* – ausschöpfen): Durch Zerlegung einer Fläche in Streifen wird die Fläche ausgeschöpft; man erkennt die Grundidee des späteren Riemannschen Integrals (s. Fig. 5). Pierre de Fermat (1601–1665) und Blaise Pascal (1623–1662) lieferten Methoden, die Tangente an jede Funktion zweiten Grades zu finden. An einer Abhandlung von Pascal aus dem Jahre 1659 bemerkte Leibniz, dass das von Pascal verwendete „charakteristische Dreieck“ eine verallgemeinerungsfähige Idee erhält. Wir sprechen heute

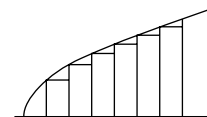


Fig. 5 Grundvorstellung der Exhaustionsrechnung

vom Steigungsdreieck. Und schließlich fand Isaac Barrow (1630–1677), der Lehrer von Newton, dass Tangentenproblem und Flächeninhaltsbestimmung zueinander inverse Problem sind. In moderner Formulierung bedeutet dies die Entdeckung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Auf diese und andere, hier aus Platzmangel nicht erwähnte Vorarbeiten konnten sich Newton und Leibniz stützen. Am Ende des 18. Jhs. wird schließlich eine Mathematik entstanden sein, die es gestattete, Bewegungsvorgänge mathematisch zu behandeln, die sowohl in den Naturwissenschaften als auch bei der Konstruktion von Maschinerien aller Art auftraten.

Newton wirkte in erster Linie als Physiker. Mit den 1687 publizierten „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (etwa: Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft) schuf er ein einheitliches physikalisches Weltbild, gab der Mechanik mit der Klärung der Grundbegriffe Kraft, Masse, Beschleunigung und Bewegungsgröße eine sichere Basis und hob die Rolle des allgemeinen Gravitationsgesetzes für die gesamte Mathematik und die Himmelsmechanik hervor. Newton knüpfte an Cavalieri, Pascal und Barrow an und schuf eine spezielle, physikalisch orientierte Form der Infinitesimalmathematik, die als Fluxionsrechnung bezeichnet wird: Alle Veränderlichen sind physikalische Größen, die von der Zeit abhängen. Sie heißen Fluents (d.i. fließende Größen). Ihre Geschwindigkeiten, ihre Änderungen in der Zeit (wir würden sagen: ihre Ableitungen) heißen Fluxionen. Die zweiten Ableitungen, Fluxionen der Fluxionen, entsprechen den Beschleunigungen. Die Bestimmung der Fluxionen aus den Fluents ist gleichbedeutend mit der Differentiation. Die Bestimmung der Fluents aus einer Fluxionen enthaltenden Beziehung ist nach heutiger Sprechweise identisch mit der Angabe der Stammfunktion bzw. mit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. In seiner in wesentlichen Teilen bereits 1671 niedergeschriebenen (aber erst 1736 postum publizierten) „*The Method of Fluxions* ...“ machte Newton reichlich Gebrauch von seiner Infinitesimalmathematik bei der Behandlung geometrischer Probleme wie Berechnung von Maxima, Minima und Wendepunkten von Kurven, der Bestimmung von Tangenten, der Berechnung von Art und Maß der Krümmung, der Flächeninhaltsbestimmung und der Rektifikation.

Newton schuf ferner eine zusammenhängende Theorie der unendlichen Reihen, deren Kernstück die Binomialreihe war. Die Grundeinsichten gehen auf die 60er Jahre zurück.

Einige Teile gingen in die „Fluxionsrechnung“ von 1736 ein. Die schon 1669 vollendete Reihenlehre unter dem Titel „*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*“ (Über die Rechenkunst mittels der Zahl ihrer Glieder nach unendlichen Gleichungen) wurde bei der Royal Society hinterlegt und war damit öffentlich zugänglich.

Übrigens bezog sich der heftige Prioritätsstreit zwischen den jeweiligen Anhängern von Leibniz und Newton bezüglich der Entdeckung der Infinitesimalrechnung niemals auf die Reihenlehre. Hier hat Newton unbestritten die Priorität. Dagegen steht heute nach gründlichen wissenschaftshistorischen Studien fest, daß Newton und Leibniz unabhängig voneinander zur Infinitesimalrechnung gelangt sind.

Leibniz ging einen anderen gedanklichen Weg als Newton. Natürlich kannte er die Schriften von Cavalieri und Pascal und anderen Mathematikern. Zugleich aber schwebte ihm eine Begriffsschrift vor, eine *arithmetica universalis*, mit der es möglich sein sollte, durch rechenähnliche Operationen die falschen gedanklichen Schlüsse von den wahren abzusondern. Dies alles ist ein deutlicher Vorgriff auf die mathematische Logik des 19. und 20. Jhs.

Leibniz fand den Zugang zur Infinitesimalrechnung während seines Pariser Aufenthaltes. Am 29. Oktober 1675 notierte er:

„Es wird nützlich sein, statt der Gesamtheiten des Cavalieri, also statt , Summe aller  $y'$  von nun an  $\int y dy$  zu schreiben.

Hier zeigt sich endlich die neue Gattung des Kalküls, die der Addition und Multiplikation entspricht. Ist dagegen

$\int y dy = \frac{y^2}{2}$  gegeben, so bietet sich sogleich das zweite auflösende Kalkül, das aus  $d(\frac{y^2}{2})$  wieder  $y$  macht. Wie nämlich das Zeichen  $\int$  die Dimension vermehrt, so vermindert sie das  $d$ . Das Zeichen  $\int$  aber bedeutet eine Summe,  $d$  eine Differenz.“

Durch ungünstige Lebensumstände verhindert, vermochte Leibniz nicht, die geplante „*scientia infiniti*“ (Wissenschaft vom Unendlichen) zu schreiben. Doch bot eine Reihe von Publikationen aus den 80er und 90er Jahren die Grundlagen des „*Calculus*“, der Differential- und Integralrechnung, einschließlich der Anwendungen, wobei sich Leibniz geschickt ausgewählter Symbole und Begriffe bediente. Wir rechnen heute weitgehend mit den Symbolen von Leibniz; auch der Terminus „Funktion“ geht auf Leibniz zurück.

Während auf der britischen Insel Newtons Fluxionsrechnung bis zum Anfang des 19. Jhs. vorherrschte und die Analysis im Vergleich zum Festland deutlich zurückblieb, eroberte sich der Leibnizsche Calculus in kurzer Zeit auf dem Kontinent allgemeine Anerkennung, nicht zuletzt wegen der sinnfälligen Symbolik. In den Händen von Jacob Bernoulli (1654–1705), Johann Bernoulli (1667–1748) und Leonhard Euler (1707–1783), um nur die produktivsten Mathematiker der Zeit zu nennen, wurde die Leibnische Infinitesimalmathematik zügig ausgebaut und ihr eine Fülle von Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik erschlossen. Es entstanden Lehrbücher, und neue mathematische Teildisziplinen wie die Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen sowie die Variationsrechnung bildeten sich heraus. Freilich konnten erst im 19. Jh. jene schon von Leibniz und Newton beklagten begrifflichen Schwierigkeiten beseitigt werden, die mit dem Gebrauch der Worte „unendlich klein“, „unendlich groß“ und Differential sowie mit dem Aufbau des Zahlensystems verbunden sind.

#### **Literatur:**

- Baron, M. E. : *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Pergamon Press 1969
- Volkert, K. : *Geschichte der Analysis*. BI Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich 1988
- von Renteln, M. (Vorlesungsskripte, 3 Hefte): *Geschichte der Analysis*. Universität Karlsruhe 1987, 1989, 1991.

# Zur Geschichte der Algebra (Hans Wußing)

Noch bis weit in das 18. Jahrhundert hinein stand die Bezeichnung „Geometrie“ häufig für das Gesamtgebiet der Mathematik – unter dem Eindruck der „*Elemente*“ von Euklid, deren Erscheinungsform jedenfalls geometrischer Art war. Indes geht algebraisches Denken weit in die Geschichte zurück, wie wir heute aus gesichertem historischem Abstand erkennen können.

## 1 Frühformen algebraischer Methoden

Vom heutigen Standpunkt aus findet man schon in frühen mathematischen Texten algebraisches Denken. So behandelte man u.a. in altägyptischen Papyri (18. Jh. v.u.Z.) lineare Gleichungen und in altchinesischen Texten werden Gleichungen höheren Grades und Gleichungssysteme gelöst. In Mesopotamien treten spezielle Gleichungen sogar bis zum Grade 4 sowie nichtlineare Gleichungssysteme auf. Bemerkenswert ist die stark ideographische Struktur einiger Keilschrifttexte: Die Worte „Länge“ und „Breite“, ursprünglich im praktischen Sinne als Feldmaß gebraucht, erhalten die Funktion einer ersten und einer zweiten Variablen. So wird der Text

*„Länge mit 3 vervielfacht*

*Breite mit 2 vervielfacht*

*addiert quadratisch*

*Fläche (der) Länge addiert und so 4, 56, 40“*

ganz der Struktur angemessen modern als

$$(3x + 2y)^2 + x^2 = 4,56,40 \text{ (Sexagesimalzahl)}$$

wiedergegeben. Die Analyse der Rechengänge zeigt eine erstaunliche Geschicklichkeit beim Umformen von Gleichungen: Es werden zweckmäßige Hilfsgrößen eingeführt und Variable eliminiert, wenn mehrere auftreten. Im Grunde rechnete der babylonische Schreiber vor 3000 Jahren genau so, wie wir es heute tun.

Die griechisch-hellenistische Mathematik war sehr wohl imstande, Gleichungen zu behandeln, allerdings mittels geometrischer Konstruktionen. So entspricht die Gleichung  $x^2 = 2$  der Aufgabe, die Diagonale in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 zu konstruieren – einer Aufgabe also, die „algebraisch“ unlösbar ist, da sie auf eine irrationale („inkommensurable“ – nicht messbare) Größe führt, die in der Antike nicht als Zahl galt. Auch gemischt-quadratische Gleichungen werden – durch sog. Flächenanlegungen – gelöst; das findet sich in den Büchern II und X der „*Elemente*“ des Euklid (um 300 v.u.Z.). Jene Verfahren werden in der Historiographie der Mathematik häufig als „geometrische Algebra“ bezeichnet.

Eine deutliche Ausnahme vom vorherrschenden Stil der antiken Mathematik tritt uns bei Diophantos von Alexandria (vermutlich 250 u.Z.) entgegen; in seiner (allerdings nur teilweise erhaltenen) „*Arithmetica*“ werden nach unserem heutigen Empfinden echt algebraische Denkweisen und Methoden verwendet. Es handelt sich um eine vom Einfachen zum Komplizierten fortschreitende Sammlung bestimmter und unbestimmter Aufgaben, deren Lösung dargeboten wird. Diophantos verwendete feststehende Abkürzungen für Gleichheit, Subtraktion und für die Variablen und deren Potenzen. Durch Rechnung werden lineare, quadratische und einige Fälle kubischer und biquadratischer Gleichungen, Bruchgleichungen, unbestimmte Gleichungen (die später den Namen diophantische Gleichungen erhielten) behandelt. Als Lösungen werden auch (positive) Bruchzahlen zugelassen. Noch bis ins 16. und 17. Jahrhundert hat Diophants „*Arithmetica*“ Impulse bei der Begründung der modernen Mathematik geliefert.

## 2 Herausbildung der Algebra als selbständiger Disziplin

Im islamischen Bereich erlebte die Mathematik seit dem 9. Jahrhundert eine bedeutende Entwicklung, insbesondere auch auf algebraischem Gebiet. Als herausragende Algebraiker seien hier al-Chwarizmi (wirkte um 820 in Bagdad) und Umar Khayyam (ca. 1048–1130) genannt. Al-Chwarizmi, der übrigens auch eine entscheidende Rolle bei der Verbreitung der indischen Ziffern ins Arabische und – indirekt – in der Folgezeit bis in den europäischen Raum gespielt hat, schrieb eine zusammenfassende Darstellung algebraischer Methoden bei der Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen. Umar Khayyam fügte die Behandlung kubischer Gleichungen hinzu. Jedoch erfolgten Formulierung und Lösungsschritte der Gleichungen lediglich in Worten, ohne Verwendung von Formeln und Symbolen.

Das Grundprinzip der Lösung von Gleichungen bestand darin, die Gleichung so umzuformen, dass nur Glieder mit positiven Koeffizienten auftreten. Zwei Hauptschritte sind wesentlich, die „Ergänzung“ oder „Wiederherstellung“ (*al-jabr*, gesprochen al-dschabr) und die „Gegenüberstellung“ (*al-muqabala*). Ein Beispiel wird das verdeutlichen: Al-Chwarizmi behandelt eine quadratische Gleichung, die wir heute, in Formeln, als  $2x^2 + 100 - 20x = 58$  schreiben. Die „Ergänzung“ (Addition von  $20x$ ) liefert  $2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x$ . Nochmalige „Auffüllung“ liefert  $2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 +$

$20x$ . Dann erfolgt die „Gegenüberstellung“  $2x^2 + 42 = 20x$  und als Normalform des einen Typs einer quadratischen Gleichung erscheint  $x^2 + 21 = 10x$ . Die Lösung erfolgt dann geometrisch.

Auch sprachgeschichtlich Interessantes ist hier zu berichten: Die Bezeichnung der ersten Operation „*al-dschabr*“ wurde zum Synonym der gesamten Lehre von den Gleichungen; durch Latinisierung entstand „Algebra“. Und aus dem Namen des Verfassers des einflussreichen Lehrbuchs, das stets zum Ziele führende Verfahren vermittelte, wurde auf verschlungenen Wegen schließlich „Algorithmus“.

Die Behandlung der Gleichungen erfolgte, wie gesagt, verbal. Lediglich für die Potenzen der Variablen waren feststehende Bezeichnungen in Gebrauch, *šai* (gesprochen dschai, das ist Wurzel, Sache, Ding) für  $x$ , *mal* (das ist Vermögen) für  $x^2$ , *ka'b* (das ist Würfel) für  $x^3$ . Die obige Gleichung  $x^2 + 21 = 10x$  ist also vom Typ „Was anlangt die Vermögen und die Zahl, die gleich sind den Wurzeln“.

Die europäische Mathematik konnte an die Antike und die islamische Mathematik anknüpfen; während der Renaissance erfolgt ein bewusster Rückgriff auf die Traditionen, auch auf algebraischem Gebiet. Aus dem arabischen *šai* (Wurzel, Ding) wurde im Lateinischen *radix* (Wurzel) bzw. *res* (Sache) und daraus im Italienischen *cosa* und im Deutschen *cos* oder *coß*. Und schließlich wurde unter „Coß“ jene Kunst verstanden, das Ding, die *coß*, aus einer Gleichung zu bestimmen, die Gleichung aufzulösen. Die Mathematikgeschichte bezeichnet daher jene Periode als Periode der Coß, in der Schritt für Schritt die Lösungsverfahren entwickelt und Symbole und Abkürzungen in Gebrauch kamen. So wurde es üblich, die gesuchte Lösung, die Wurzel, mit dem Endbuchstaben von *radix* zu bezeichnen; aber auch hier sind die sprachgeschichtlichen Wege noch nicht in allen Einzelheiten aufgeklärt.

Sowohl die zunehmende Verwendung von Symbolen als auch die Algebraisierung der Rechenmethoden wurden nicht zuletzt durch den Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft und die sich daraus ergebenden Notwendigkeiten und Praktiken des kaufmännischen Rechnens unterstützt. Viele der in den Städten arbeitenden Rechenmeister wurden so zu Cossisten, zu Wegbereitern der Algebra. Auch Adam Ries (1492–1559), der bekannte deutsche Rechenmeister, war ein bedeutender Cossist.

Um 1600/1620 hatte sich die Algebra als neue, selbständige mathematische Disziplin neben der Geometrie herausgebildet, zumal auch entscheidende Fortschritte bei den Lösungsverfahren für Gleichungen gemacht worden waren. Die hauptsächlichen ersten Impulse waren von Italien ausgegangen. Scipione dal Ferro (1465–1526) und der Rechenmeister Niccolo Tartaglia (ca. 1499–1557) hatten eine rechnerische Lösung der Gleichung dritten Grades gefunden, die von Tartaglia 1539 an den Universitätsprofessor Geronimo Cardano (1501–1576) weitergegeben wurde. Dieser aber brach das Versprechen der Geheimhaltung und publizierte das Verfahren, zusammen mit der von seinem Schüler Ludovici Ferrari (1522–1569) gefundenen Lösung für die Gleichung vierten Grades, in der „*Ars magna sive de regulis algebraicis*“ (Die große Kunst oder über algebraische Regeln) von 1545. Es kam zu einem großen Skandal, der ganz Italien bewegte und auch die soziologischen Spannungen zwischen den Universitätsgelehrten und den Männern der unmittelbaren Praxis widerspiegelte. Der stark algebraisch orientierten mathematischen Schule Oberitaliens gehörte auch der in Bologna wirkende Ingenieur Rafeal Bombelli (1526–1572) an. Er hat, modern interpretiert, an Rechenausdrücken der Form  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  die Multiplikationsgesetze für komplexe Zahlen studiert.

Bombelli war der letzte bedeutende Algebraiker jener Periode. Autoren aus Frankreich, den Niederlanden, Deutschland und England traten in den Vordergrund. Albert Girard (1595–1632) veröffentlichte 1626 ohne Beweis den Satz, dass jede Gleichung  $n$ -ten Grades  $n$  Wurzeln besitzt, war also im Besitz des Fundamentalsatzes der Algebra. Die „*Geometrie*“ (1637) von René Descartes (1596–1650) enthält die Aussage, dass jede ganzzahlige Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten das absolute Glied teilt, sowie die sog. Cartesische Zeichenregel. Dies sowie der Fundamentalsatz wurden allerdings erst durch Carl Friedrich Gauß (1777–1855) streng bewiesen.

Der methodische Fortschritt der durchgängigen Verwendung von Symbolen und Zeichen erreichte mit Descartes und Francois Vieta (1540–1603) einen ersten Höhepunkt. Vieta trat mit zwei algebraisch orientierten Werken hervor, der „*In artem analyticam Isagoge*“ (etwa: Einführung in die algebraische Kunst) von 1591 und „*Ad logicam speciosam notae priores*“ (Erste Kennzeichen einer prachtvollen Rechenkunst), postum 1631. Vieta schuf eine einheitliche Bezeichnungsweise für Konstante und Variable, verwendete durchgehend  $+$  und  $-$  als Operationssymbole, den Bruchstrich, eckige und geschweifte Klammern und entwickelte die Umformtechnik zur Virtuosität: Auflösen von Klammern, Abspalten von Faktoren, Transformation von Gleichungen durch neu eingeführte Variable, Rationalmachen des Nenners u.a.m. Die heutige Vereinbarung, die letzten Buchstaben  $x$ ,  $y$ ,  $z$  für die Variablen zu verwenden, rührt allerdings von Descartes her.

### 3 Algebra als Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen

Hinsichtlich der Algebra war das 18. Jahrhundert von dem Bemühen geprägt, auch für die (algebraischen) Gleichungen höheren als vierten Grades Lösungsformeln zu finden – vergeblich, trotz aller geistreichen Rechenansätze etwa bei Ehren-

fried Walter von Tschirnhaus (1651–1708). Joseph Louis Lagrange (1736–1813) äußerte 1770/71 wohl als erster die Vermutung, dass diese Lösungsverfahren nicht gefunden werden können, jedenfalls nicht mit den bisherigen Mitteln. Gauß sprach 1799 in seiner Dissertation, die den Fundamentalsatz der Algebra zum erstenmal streng bewies, und nochmals 1801 deutlich aus, dass die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichung höheren als vierten Grades in Radikalen unmöglich ist:

*„Bekanntlich sind alle Bemühungen der größten Geometer, die allgemeine Auflösung der Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, oder (um genauer zu definieren, was man will) die Reduction der gemischten Gleichungen auf reine Gleichungen zu finden, bisher stets vergeblich gewesen, und es bleibt kaum zweifelhaft, dass dieses Problem nicht sowohl die Kräfte der heutigen Analysis übersteigt, als vielmehr etwas Unmögliches erreichen will.“*

Diese Aussage bezieht sich natürlich auf die allgemeine algebraische Gleichung. Gauß selbst hatte in seinem Meisterwerk „*Disquisitiones arithmeticae*“ von 1801 die Kreisteilungsgleichung auf das genaueste studiert, als Spezialfall einer in Radikalen lösbaren Gleichung beliebig hohen Grades.

Um diese Zeit, 1799, hatte der Italiener Paolo Ruffini (1765–1822) – ohne dass Gauß davon gewusst hätte – den Versuch eines Beweises unternommen, dass die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht in Radikalen lösbar ist. Ruffini nutzte, modern gesprochen, die Bestimmung der Untergruppen der symmetrischen Gruppe fünften Grades aus. Sein Beweis ist allerdings noch in einigen Punkten lückenhaft.

Ruffinis Ergebnisse blieben verhältnismäßig lange unbekannt. So erfuhr der andere Entdecker der Nichtauflösbarkeit höherer Gleichungen, der jung an Tuberkulose verstorbene Norweger Niels Henrik Abel (1802–1829), erst um 1826 von Ruffini, nachdem er selbst schon zu diesem Thema zu publizieren begonnen hatte. Abel kannte die Arbeiten von Lagrange, war inspiriert von der Theorie der Kreisteilung bei Gauß, veröffentlichte 1824 einen vollständigen Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Gleichung fünften Grades und konnte 1826 den Satz für alle den vierten Grad übersteigenden Gleichungen beweisen. Durch Umkehrung der Fragestellung kam Abel 1828 weit auf dem Wege voran, die gesamte Klasse aller in Radikalen lösbaren Gleichungen zu bezeichnen. Auch Abel verwendete bereits gruppentheoretische Schlussweisen.

Die endgültige Lösung des Auflösungsproblems algebraischer Gleichungen erfolgte 1831/32 durch den in einem Duell ums Leben gekommenen Evariste Galois (1811–1832), und zwar auf gruppentheoretischer Basis. Galois ordnete jeder algebraischen Gruppe eine eindeutig bestimmte (Permutations)Gruppe zu. Aus ihrer Struktur kann man ablesen, ob eine Gleichung in Radikalen lösbar ist. Insbesondere erkannte er die entscheidende Rolle der „ausgezeichneten Untergruppen“, die wir heute Normalteiler nennen.

#### 4 Implizite Strukturalgebra

Vom Standpunkt der Strukturmathematik des 20. Jahrhunderts – der Name Bourbaki möge für diese ganze Richtung stehen – ist es faszinierend zu sehen, dass sich schon im frühen 19. Jahrhundert im Gebiet der Algebra abstraktes strukturelles Denken herauszubilden begann, wenn auch sozusagen an konkreten mathematischen Gegenständen, in impliziter Form. Einige Beispiele mögen dies belegen: So ist die Gaußsche Theorie der Komposition der Formen in den „*Disquisitiones arithmeticae*“ von 1801 äquivalent mit der Analyse der Struktur einer endlichen abelschen Gruppe. Richard Dedekind (1831–1916) las schon im Wintersemester 1856/57 über Galois-theorie und verwendete den Körperbegriff. Gauß, William Rowan Hamilton (1805–1865) und schließlich Georg Frobenius (1849–1917) erkannten, dass, modern gesprochen, der Körper der komplexen Zahlen der größte kommutative endliche Erweiterungskörper der reellen Zahlen ist. Bei größeren „Bereichen“ können nicht mehr alle „normalen“ Gesetze der beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation gelten. Hamilton studierte zur Mitte des 19. Jahrhunderts nichtkommutative Verknüpfungen und kam so zur Begründung der Theorie der Quaternionen. Hermann Hankel (1839–1873) hob 1867 hervor, dass die Gesetze der Verknüpfung nicht Eigenschaften der Zahlen sind, sondern dass vielmehr umgekehrt die durch Axiome fixierten Verknüpfungsgesetze den entsprechenden Zahlenbereich gleichsam schaffen. Die Gesetze der Verknüpfung (Kommutativität, Assoziativität, Distributivgesetz usw.) selber wurden zum Gegenstand der Untersuchung. Diese abstrakte formalistische Auffassung ist dann später, am Ende des Jahrhunderts, in der von David Hilbert (1862–1943) entwickelten axiomatischen Methode durchgebildet worden, und zwar explizit in der Abhandlung „*Über den Zahlbegriff*“ von 1900.

Zeitlich und inhaltlich parallel dazu erfolgte die Herausarbeitung abstrakter algebraischer Strukturen, zuerst die der Gruppe, dann die des Körpers, u.a. durch Arthur Cayley (1821–1895), Leopold Kronecker (1823–1891) und eine Gruppe nordamerikanischer Mathematiker. Das vielgelesene „*Lehrbuch der Algebra*“ (1895/96) von Heinrich Weber (1842–1913) rückte Gruppe und Körper als grundlegende abstrakte algebraische Strukturen in den Vordergrund. Die Nordamerikaner Leonard Eugene Dickson (1874–1954) und Joseph Wedderburn (1882–1948) begründeten um 1907/08 die moderne Algebrentheorie. Der allgemeine Ringbegriff geht auf Abraham Fraenkels (1891–1965) Arbeiten aus dem Jahr 1914 zurück.

## 5 Moderne Algebra

Ende der zwanziger Jahre waren drei Säulen der modernen Algebra – Gruppen-, Körper- und Algebrentheorie (Theorie der hyperkomplexen Systeme) – in ihrer abstrakten, axiomatisierten Form entwickelt. Durch diese Gliederung in ihre Grundstrukturen war die Algebra zu einem übersichtlichen Zweig der Mathematik geworden, nicht zuletzt durch das programmatische Vorbild von Emmy Noether (1882–1935) in Göttingen. Ihr Schüler, Barthel Leendert van der Waerden (geb. 1903), hob das von ihr vertretene Prinzip der modernen oder abstrakten Algebra mit den Worten hervor:

*„Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.“*

Aber noch betrachtete man um 1930 algebraische Begriffe und Methoden als gewissermaßen zweitrangig gegenüber der Analysis. Diese Situation wurde durch van der Waardens Monographie *„Moderne Algebra“* (1930/31) entscheidend geändert. Dieses hervorragend geschriebene Buch zählt auch heute noch zu den besten Algebralehrbüchern und ist ein sicherer Leitfaden durch die Anfangsgründe und die prinzipiellen Denkweisen der Algebra, die sich heute als Summe vieler hochspezieller Teilgebiete darbieten und in engem Zusammenhang mit fruchtbaren Anwendungen in den theoretischen Naturwissenschaften und etwa in der Computertechnik steht.

### Literatur

- Scholz, E. (Hrsg): *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. BI Wissenschaftsverlag. Mannheim/Wien/Zürich 1990
- van der Waerden, B. L. : *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Springer Verlag Berlin. Heidelberg. New York. Tokyo 1985
- Wußing, H.: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*. Berlin 1969

## Zur Geschichte der analytischen Geometrie (Hans Wußing)

Eine Darstellung dessen, was wir heute als analytische Geometrie bezeichnen, hat sowohl auf die Geschichte geometrischen Denkens als auch auf die der Algebra und schließlich auf die Durchdringung und Verschmelzung beider mathematischer Gebiete einzugehen.

Die griechisch-hellenistische Mathematik hat eine hochentwickelte Kegelschnittlehre hervorgebracht. Apollonios von Perge (ca. 262–ca. 190 v. u. Z.) verfasste, auf früheren Ergebnissen aufbauend, eine achtbändige Lehre von den Kegelschnitten, „*Conica*“ (d. i. Schnitte) genannt. Die Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel entstehen durch Schnitte von Kreiskegeln mit Ebenen wechselnder Neigung zur Kegelachse. Zwar wurde die Theorie der Kegelschnitte in der Antike ganz anders als heute dargestellt, da man z. B. noch nicht die Koordinatenschreibweise benutzte, doch ging sie, nebenbei bemerkt, weit über den gegenwärtigen Schulstoff hinaus.

Auf dem Wege über die islamischen Länder gelangten wesentliche Ergebnisse der „*Conica*“ auch nach Europa und wurden (teilweise) schon 1537 lateinisch aus dem Griechischen in Venedig herausgegeben. Sie haben noch bis ins 18. Jahrhundert hinein die Entwicklung der Mathematik beeinflusst. Dazu kam, dass die Kegelschnittlehre nicht nur in mathematischer, sondern auch in physikalischer Hinsicht in ganz neue wissenschaftlich-technische Zusammenhänge hineingestellt wurde: Die Fluglinien von Geschossen erwiesen sich als Parabeln und Johannes Kepler (1571–1630) fand, dass die Planeten in Ellipsen um die Sonne laufen.

Mit Pierre Fermat (1601–1665), der übrigens auch eine herausragende Rolle bei der Begründung der Infinitesimalmathematik gespielt hat, wurde ein neuartiger Zugang zur Kegelschnittlehre eröffnet. In seiner Abhandlung „*Ad locos planos et solidos isagoge*“ (Einführung in die ebenen und körperlichen [geometrischen] Örter) (vor 1637 niedergeschrieben, aber erst 1679 aus dem Nachlass publiziert) schreibt er voller Stolz:

*„Es ist kein Zweifel, dass die Alten sehr viel über Örter geschrieben haben. Zeuge dessen ist Pappos, der zu Anfang des 7. Buches versichert, dass Apollonios über ebene, Aristaios über körperliche Örter geschrieben habe. Aber wenn wir uns nicht täuschen, fiel ihnen die Untersuchung der Örter nicht gerade leicht. Das schließen wir daraus, dass sie zahlreiche Örter nicht allgemein genug ausdrückten, wie man weiter unten sehen wird.“*

*Wir unterwerfen daher diesen Wissenszweig einer besonderen und ihm eigens angepassten Analyse, damit in Zukunft ein allgemeiner Zugang zu den Örtern offen steht.“*

Dann kommt ohne weiteren Übergang die entscheidende Stelle, in der das Prinzip der analytischen Geometrie erstmals ausgesprochen wurde.

*„Sobald in einer Schlussgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine gerade oder krumme Linie ... Die Gleichungen kann man aber bequem versinnlichen, wenn man die beiden unbekannten Größen in einem gegebenen Winkel (den wir meist gleich einem Rechten nehmen) aneinandersetzt und von der einen die Lage und den einen Endpunkt gibt.“*

Das durchgreifend Neue besteht also darin, für eine algebraische Gleichung zwischen zwei unabhängigen Variablen die geometrische Repräsentation durch eine Kurve zu bestimmen. Fermat konnte einen im wesentlichen lückenlosen Beweis geben, dass Kurven zweiter Ordnung (wenn die Variablen höchstens im zweiten Grade auftreten) stets Kegelschnitte darstellen.

Der zweite wesentliche Impuls an die Herausbildung der analytischen Geometrie ging ebenfalls von einem Franzosen aus, von dem Philosophen und Mathematiker René Descartes (1596–1650). Im Jahre 1637 erschien sein „*Discours de la méthode*“ (Abhandlung über die Methode). Einer der drei Anhänge, die den Nutzen seiner philosophischen Methode am konkreten Gegenstand demonstrieren sollten, war der Geometrie gewidmet. Descartes entwickelte dort eine geometrische Basis für die Lösung algebraischer Probleme. Dabei ging er weit über die Antike hinaus: Unter den (wie in der Antike auch) mit Buchstaben bezeichneten Strecken AB, CD, ... waren nicht nur geometrisch die Strecken, sondern zugleich die den Streckenlängen entsprechenden Zahlenwerte zu verstehen, unter Zugrundelegung einer Einheit. So kann er beispielsweise von Addition und Multiplikation von Strecken sprechen und mit Strecken rechnen – eine Rede- und Denkweise, die für die antike Mathematik völlig sinnlos war. Auf seiner Basis traf Descartes die Unterscheidung zweier wesentlicher Problemgruppen:

1. „Bestimmte Aufgaben“: Dies bedeutet in unserer heutigen Sprechweise die Auflösung algebraischer Gleichungen durch geometrische Konstruktionen.
2. „Unbestimmte Aufgaben“: Wir würden heute von der Konstruktion geometrischer Örter bzw. von der Gleichung einer Kurve bzw. von einer algebraischen Beziehung zwischen mehreren Variablen sprechen.

Descartes konnte für beide Problemgruppen überzeugende Beispiele der mit seiner Methode erzielten Fortschritte angeben. Doch darf man sich vom Grad der Reife seiner analytischen Geometrie keine übertriebenen Vorstellungen machen. So fehlt bei Descartes noch das nach ihm benannte Koordinatensystem mit zwei Achsen; er hat lediglich eine Bezugslinie. Das „cartesische“ Koordinatensystem findet sich erst 1676 bei Isaac Newton (1663–1727), zusammen mit einer großangelegten Klassifikation der Kurven dritter Ordnung in allen vier Quadranten. Erstmals treten so negative Koordinaten auf. Einen weiteren wesentlichen Schritt vorwärts beim konsequenten Ausbau der analytischen Geometrie tat Euler mit seiner „*Introductio in analysin infinitorum*“ (Einführung in die Analysis der unendlich kleinen Größen) von 1748. Der fachspezifische Ausdruck „analytische Geometrie“ stammt wohl erst von Sylvestre Francois Lacroix (1765–1843), der ihn 1796/99 in seinem Lehrbuch „*Cours de mathématiques*“ verwendete.

Während des 19. Jahrhunderts wurde die analytische Geometrie mit weitreichenden algebraischen Hilfsmitteln – Determinanten, Matrizen, Gruppen, Vektoren – ausgerüstet. Andere Koordinatensysteme als das cartesische wurden in breitem Umfange angewandt; auch beschränkte sich die analytische Geometrie nicht mehr auf drei Dimensionen. In den Händen von August Ferdinand Möbius (1790–1868), Julius Plücker (1801–1868), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), Arthur Cayley (1821–1895), James Joseph Sylvester (1814–1897), William Rowan Hamilton (1805–1865), Ludwig Otto Hesse (1811–1874) und vielen anderen erhielt die analytische Geometrie schon damals wesentliche Züge der heutigen im Schul- und Hochschulunterricht verwendeten Gestalt, die in enger methodischer Einheit zur linearen Algebra und zur Vektorrechnung steht.

### **Literatur**

- Descartes, R. : *Die Geometrie*. Dtsch. ed. L. Schlesinger. Berlin 1894
- de Fermat, P. : *Einführung in die ebenen und körperlichen Örter*. Leipzig 1923
- TROPFKE, J. : *Geschichte der Elementarmathematik*. Bd. VI. *Analysis. Analytische Geometrie*. 2. Aufl. Berlin/Leipzig 1924

# Zur Geschichte der komplexen Zahlen (Karl-Heinz Schlote)

Die komplexen Zahlen sind für viele mathematischen Theorien wie auch bei zahlreichen Anwendungsproblemen, etwa in der Elektrotechnik, der Kartographie, der Hydrodynamik und der Astronomie von grundlegender Bedeutung. Trotzdem gehören sie bereits zu jenen Größensystemen, die den meisten Menschen unbekannt bleiben. Im folgenden sollen einige wesentliche Elemente ihrer Geschichte kurz betrachtet werden.

## 1 Das erste Auftreten der komplexen Zahlen

Die Geschichte der komplexen Zahlen beginnt im 16. Jahrhundert. Zwar treten schon bei Heron (um 100 lebend), Diophant (um 250 lebend) und später bei N. Chuquet (1445? bis ca. 1488) in schlecht gewählten Zahlenbeispielen Wurzeln aus negativen Zahlen auf, aber dabei wird nicht mit diesen neuen Größen gerechnet, ja sie werden gar nicht als Größen interpretiert. Die komplexen Zahlen ergaben sich bei Aufgaben, die man als Aufgabentyp prinzipiell beherrschte, die aber durch die Wahl der Ausgangswerte auf nicht vorhergesehene Schwierigkeiten führten und unlösbar wurden. Bei geometrischen Problemen repräsentieren die Ausgangswerte einen geometrisch nicht realisierbaren Sachverhalt, so daß die später übliche Gepflogenheit, diese Aufgaben als unmöglich zu bezeichnen, recht sinnvoll ist. Das Auftreten komplexer Zahlen kann als rein zufällig bezeichnet werden, bei Wurzel war es selbstverständlich, sich auf positive Radikanden zu beschränken, und auch die negativen Zahlen gehörten nicht zu dem damals üblichen Zahlbereich.

So verwundert es nicht, dass sich nur wenige Mathematiker zu den Wurzeln aus negativen Zahlen äußerten. Wenn sie es taten, wie die Inder Mahavira (um 850 lebend) und Bhaskara II (1114 bis nach 1191), so negierten sie die Existenz einer Wurzel aus negativen Zahlen. (Dies ist ja auch richtig, wenn man den Bereich der reellen Zahlen als Grundbereich wählt.) Entsprechend erklärten Gelehrte wie Fibonnaci (1170?–1250?), L. Pacioli (ca. 1445–1517) und G. Cardano (1501–1576) quadratische Gleichungen bzw. die Aufgabenstellungen für unmöglich, die auf derartige Wurzel führten. Cardano sprach dabei von falschen bzw. sophistischen Lösungen und verfügte sogar über eine Symbolik, um diese Größen aufzuschreiben.

Der entscheidende Impuls für die Beschäftigung mit komplexen Zahlen ergab sich aus dem Bestreben, eine Lösungstheorie für die kubischen Gleichungen aufzubauen. Nach jahrhundertelangen Bemühungen vieler Mathematiker und Rechenmeister gelang es S. del Ferro (1465–1526) um 1508 und N. Tartaglia (1499–1557) 1535 unabhängig voneinander eine algebraische Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades anzugeben. Cardano publizierte die Formeln 1545 in dem grundlegenden Buch zur Algebra und Gleichungstheorie „*Ars magna* ...“. Wie schon Tartaglia und del Ferro konnte er jedoch den sog. casus irreducibilis, d. h.  $x^3 = ax + b$  mit  $(\frac{b}{2})^2 < (\frac{a}{3})^3$ , nicht lösen. Sucht man in diesem Fall eine Lösung in der Form  $x = u + v$ , so führt die Rechnung zur Bestimmung von  $u$  und  $v$  auf eine Wurzel aus einer negativen Zahl. Auch ein formales Einsetzen in die von Cardano angegebene Lösungsformel liefert einen Ausdruck in dem eine Wurzel aus einer negativen Zahl auftritt. Diese Gleichungen ließen sich aber nicht nach der üblichen Praxis für unmöglich erklären, da in den jeweils betrachteten konkreten Fällen zwar  $u$  und  $v$  komplexe Zahlen waren, die Lösung  $x$  aber reell war. Eine Auseinandersetzung mit den „sonderbaren“ Zahlen war folglich unausweichlich.

## 2 Das Rechnen mit komplexen Zahlen

Erstmals stellte R. Bombelli (1526–1572) in seiner zwischen 1557 und 1560 geschaffenen und 1572 publizierten Monographie „*L'Algebra*“ das Rechnen mit komplexen Zahlen genau dar. Er widmete sich zunächst dem Rechnen mit rein-imaginären Zahlen. Dabei interpretierte er die Größen  $+\sqrt{-1}$  bzw.  $-\sqrt{-1}$  als eine Art Vorzeichen, für die er entsprechende Rechenregeln ableitete. Für  $\sqrt{-1}$  wählte er das Symbol *dm.* als Abkürzung von *di meno*, und aus *meno radice di meno* (etwa: negative Wurzel aus der negativen Einheit) folgte *m.dm.* als Symbol für  $-\sqrt{-1}$  bzw. *p.dm.* von *piu radice di meno* für  $+\sqrt{-1}$ .

Bombelli vermerkte, daß eine Summe aus einer reellen und einer rein-imaginären Zahl nicht weiter zusammengefaßt werden kann. Dies ermöglicht es, eine komplexe Zahl als formale Summenbildung aufzufassen, und legt eine entsprechende symbolische Darstellung nahe. Auch wenn Bombelli nicht diesen abstrakten Standpunkt einnahm, führte er eine geeignete Symbolik zur Bezeichnung komplexer Zahlen ein und behandelte die arithmetischen Grundoperationen mit ihnen, also Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie das Ziehen der dritten Wurzel. Er illustrierte die Operationen virtuos mit vielen Beispielen. Außerdem baute er die obige Motivation für eine Beschäftigung mit den komplexen Zahlen weiter aus. Er löste u. a. die Gleichung  $x^3 = 15x + 4$ . Für  $u$  und  $v$  liefert die Rechnung die komplexen Zahlen  $2 + i$  bzw.  $2 - i$  (in moderner Bezeichnungsweise) und somit für  $x = u + v$  die reelle Lösung 4.

Durch eine geometrische Konstruktion wies Bombelli weiterhin nach, daß für die Gleichung  $x^3 = ax + b$  mit  $a, b$  positiv, stets eine positive Lösung existiert. Trotzdem erkannte auch er komplexe Zahlen als Gleichungslösungen nicht an und bezeichnete eine Gleichung, die auf Wurzeln aus negativen Zahlen führte, bzw. die zugehörige Problemstellung als un-

möglich. Die komplexen Zahlen nannte er, ähnlich wie Cardano, sophistische Größen. Cardano hatte bei der Lösung der Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 ist, die Werte  $5 + \sqrt{-15}$  und  $5 - \sqrt{-15}$  als Resultat erhalten und sie als „wahrhaft sophistische Größen“ bezeichnet. Als er 1576 eine zu Bombelli analoge Darstellung des Rechnens mit komplexen Zahlen gab, hob er als weitere sonderbare Eigenschaft der komplexen Zahlen hervor, daß aus einer Zahl  $a + bi$  mit  $a > b$  durch Quadrieren eine Zahl  $c + di$  entstehen konnte, für die  $c < d$  galt.

### 3 Komplexe Zahlen und Gleichungstheorie

Trotz der Vorteile, die die Benutzung komplexer Zahlen bei der Auflösung von Gleichungen brachte, blieben diese Größen den meisten Mathematikern höchst geheimnisvoll. Insbesondere zweifelte man immer wieder daran, ob die mit diesen Größen ausgeführten Operationen zu richtigen Ergebnissen führten. Bis ins 18. Jahrhundert war vor allem der irreduzible Fall der kubischen Gleichung Anlass für viele Spezialuntersuchungen, die aber für die Anerkennung der komplexen Zahlen keine neuen Erkenntnisse oder Anregungen brachten. Es sei lediglich erwähnt, dass bereits 1591 F. Vieta (1540–1603) unter Verwendung seiner goniometrischen Studien eine Lösung der kubischen Gleichung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen fand und dabei den Rückgriff auf komplexe Zahlen vermeiden konnte.

Gleichzeitig gab es jedoch immer wieder Mathematiker, die sich den neuen Größen zuwandten und neue interessante Resultate, aber auch herausfordernde Fragestellungen entdeckten. Etwa seit der Mitte des 17. Jahrhunderts wurde allgemein und ohne Bedenken mit den Wurzeln aus negativen Zahlen gerechnet. Schon 1608 bemerkte P. Roth (?–1617), daß eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Lösungen hat. Diesen Satz verallgemeinerte A. Girard (1595–1632) 1629 zum Fundamentalsatz der Algebra, daß jede Gleichung n-ten Grades genau n Lösungen hat. Als Lösungen ließ er neben positiven reellen Zahlen auch negative und komplexe Zahlen zu. Letztere nannte er unmögliche Lösungen. Damit wurde die Bedeutung der komplexen Zahlen wesentlich erhöht, denn ohne sie konnte der Fundamentalsatz nicht in dieser Kürze und Allgemeinheit formuliert werden. Girard war sich dieser Tatsache im wesentlichen bewußt. Um die Anerkennung der unmöglichen Lösungen zu rechtfertigen, verwies er auf die Gültigkeit der allgemeinen Regel und die Sicherheit, daß es keine weiteren Lösungen gibt, die dadurch erreicht würde.

R. Descartes (1596–1650) stellte 1637 fest, daß es für jeden Grad Gleichungen gibt, die soviel reelle Lösungen haben, wie ihr Grad angibt. Im allgemeinen sind diese Wurzeln jedoch nicht alle reell, sondern einige nur „eingebildet“ (imaginär). Zu jeder Gleichung kann man sich soviel Wurzeln vorstellen, wie ihr Grad angibt. 70 Jahre später vertrat I. Newton (1643–1727) eine ähnliche Meinung. Für die Mathematiker des 18. Jahrhunderts stand es dann außer Zweifel, daß eine Gleichung n-ten Grades n Lösungen hatte. Der Beweis des Fundamentalsatzes widerstand jedoch lange Zeit den intensiven Anstrengungen der bedeutendsten Mathematiker, wie L. Euler (1707–1783), J. d'Alembert (1717–1783) und J.-L. Lagrange (1736–1813). Erst C. F. Gauß (1777–1855) gelang in seiner Dissertation 1799 ein erster Beweis. Wohl wissend, daß er dabei noch ein Argument der algebraisch-geometrischen Anschauung verwendet hatte, gab Gauß 1815, 1816 und 1849 weitere vollständige Beweise. Der Beweis von 1816 benutzt explizit komplexe Zahlen.

Die Schwierigkeiten des Beweises waren eng mit den komplexen Zahlen verknüpft. So rang man lange Zeit mit dem Nachweis, daß die Wurzeln jeder Gleichung in der Form  $a + b\sqrt{-1}$  mit reellen Zahlen  $a, b$  dargestellt werden können und mit einer komplexen Zahl auch die zu ihr konjugiert-komplexe eine Wurzel der Gleichung ist. Letzteres sichert die Zerlegbarkeit des zur Gleichung gehörigen Polynoms in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. Es sei am Rande vermerkt, daß es im konkreten Einzelfall erhebliche Probleme bereiten konnte, eine solche Zerlegung anzugeben. So sind etwa von G. W. Leibniz (1646–1716) und N. Bernoulli (1687–1759) Beispiele bekannt, in denen ihnen dies nicht gelang.

### 4 Weitere Anwendungen

Eine weitere wichtige Frage, die auch mit dem obigen Problem der Lösungsdarstellung bei Gleichungen n-ten Grades zusammenhing, war, ob das Ergebnis des Operierens mit komplexen Zahlen wieder eine komplexe Zahl ist. Dieser Sachverhalt wurde von d'Alembert und Euler Mitte des 18. Jahrhunderts aufgeklärt.

D'Alembert zeigte 1746, daß bei den arithmetischen Operationen und beim Potenzieren einer komplexen Zahl mit einer eben solchen wieder komplexe Zahlen erhalten werden. Euler ging sogar noch weiter und wies für die damals gebräuchlichen Funktionen nach, daß für einen komplexen Wert des Arguments der Funktionswert wieder in der Form  $a + b\sqrt{-1}$  dargestellt werden kann, insbesondere haben also  $\log(a + b\sqrt{-1})$  bzw.  $\sin(a + b\sqrt{-1})$  die Form  $A + B\sqrt{-1}$ . Die Verwendung komplexer Zahlen führte hier zur Herausbildung einer völlig neuen analytischen Theorie, der Untersuchung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mit der von ihm entwickelten vollständigen Theorie der elementaren Funktionen einer komplexen Veränderlichen leistete Euler einen ersten wichtigen Beitrag zu diesem Gebiet. Zu diesem Themenkreis gehört gleichfalls die systematische Ableitung der Moivreschen Formel  $(\cos z \pm \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \sin nz$  und

des Zusammenhangs zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen  $e^{\sqrt{-1}\varphi} = \cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi$  (\*) durch Euler. Die erste Formel hatte A. de Moivre (1667–1754) 1730 erstmals publiziert, die zweite in etwas anderer Form R. Cotes (1682–1716) 1714. Letztere war auch die Basis für Euler, um 1749 die Auseinandersetzung um die Logarithmen negativer bzw. imaginärer Zahlen vollständig aufzuklären und die Mehrdeutigkeit der Logarithmusfunktion als Ursache für die verschiedenen Mißverständnisse und Fehlinterpretationen nachzuweisen. Es dauerte aber ein weiteres Jahrhundert bis die Mehrzahl der Zweifler verstummt oder überzeugt war.

Eine weitere Anwendung fanden die komplexen Zahlen in der Analysis bei der Berechnung verschiedener Integrale und der Integration einiger partieller Differentialgleichungen. Dies alles gehört schon in die Frühgeschichte der komplexen Funktionentheorie, deren genaue Darstellung den Rahmen dieses Beitrages sprengen würde.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß auch in der Zahlentheorie und der Geometrie die komplexen Zahlen sehr vorteilhaft benutzt wurden. Man denke nur an die fundamentale zahlentheoretische Arbeit „*Disquisitiones arithmeticae*“ von C. F. Gauß von 1801 und die darin entwickelte Kreisteilungstheorie einschließlich der vollständigen Auflösung der Kreisteilungsgleichung und deren Anwendung zum Studium biquadratischer Reste, sowie an die von ihm 1831 aufgestellte Theorie der ganzen komplexen Zahlen.

## 5 Geometrische Deutung der komplexen Zahlen

Seit Descartes Zeiten rechnete man mühelos mit den komplexen Zahlen, und wegen ihres Nutzens waren sie in der Mathematik bald nicht mehr wegzudenken, doch ihre Begründung blieb bis zum 19. Jahrhundert unklar. Noch Euler verfügte 1749 nicht über eine klare Definition der imaginären Zahlen und bestimmte sie in seiner Arbeit über die imaginären Wurzeln von Gleichungen als Größen, die weder größer, noch kleiner, noch gleich 0 seien und folglich etwas Unmögliches wie beispielsweise  $\sqrt{-1}$  oder allgemein  $a + b\sqrt{-1}$  sind. Obwohl Euler viele wichtige Resultate über komplexe Zahlen erzielte, gelang ihm keine Begründung der komplexen Zahlen, und gelegentlich unterliefen ihm bei Rechnungen mit ihnen auch Fehler. Dabei hatte er mit seiner Relation (\*) die Grundlage für die spätere geometrische Deutung der komplexen Zahlen geliefert, denn diese Formel ordnet jeder komplexen Zahl eine Länge und einen Winkel zu und zeigt, daß bei der Multiplikation zweier Zahlen die Längen multipliziert und die Winkel addiert werden.

Aus der Zeit vor Euler sind zwei Arbeiten zur Begründungsproblematik besonders erwähnenswert. F. Vieta schuf um 1590 eine sog. Dreiecksrechnung, die erst posthum 1631 als Teil einer größeren Arbeit gedruckt wurde, die er aber bereits 1593 zur Lösung diophantischer Gleichungen benutzte. Der komplexen Zahl  $x + iy$  wird das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten  $a = x$ ,  $b = y$  und  $c = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  zugeordnet. Der eigentümliche Dreieckskalkül kann dann als geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen gedeutet werden.

Wichtige Ideen zur Begründung der komplexen Zahlen publizierte auch J. Wallis (1616–1703) in seinem Algebrabuch von 1685. Er deutete einerseits eine imaginäre Zahl  $\sqrt{-bc}$  als mittlere Proportionale zwischen  $-b$  und  $c$  bzw.  $b$  und  $-c$ , andererseits schloss er aus der Veranschaulichung der negativen Zahlen als Abschnitte auf der Geraden, dass komplexe Zahlen in der Ebene darzustellen seien. Es gelang ihm jedoch nicht, eine entsprechende Zuordnung anzugeben.

Eine solche Interpretation fand dann 1797 der dänische Geodät C. Wessel (1745–1818). Seine Publikation in den Schriften der Dänischen Königlich Akademie wurde jedoch erst 1897 in einer französischen Übersetzung bekannt. Wessel entwickelte sowohl eine geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen als auch einen Kalkül für das Rechnen mit ihnen, der bereits Ansätze für weitere Verallgemeinerungen in sich trug. Er führte die Einheiten 1 und  $\varepsilon$  ein, erstere wird durch die positive Einheitsstrecke mit dem Richtungswinkel  $0^\circ$  dargestellt, letztere durch eine dazu senkrechte Strecke mit dem Winkel  $90^\circ$ . Wessel erklärte zunächst das Rechnen mit den Einheiten, um dann die Operationen für beliebige Strecken zu definieren. Die Addition bereitete als Aneinandersetzen der Strecken keine Probleme, für die Multiplikation wandte er die Regel an, dass der Richtungswinkel des Produkts gleich der Summe der Winkel der Faktoren ist. Als Folgerung hieraus erhielt er u. a.  $\varepsilon = \sqrt{-1}$ , somit veranschaulichte er die komplexen Zahlen als Punkte (Endpunkte von Strecken) in der Ebene und baute eine exakte Theorie auf. Für die Grundrechenarten mit komplexen Zahlen gab er geometrische Konstruktionen an und zeigte, dass auch umgekehrt, wenn die Rechenoperationen für Strecken durch diese Konstruktionen definiert werden, diese Operationen den üblichen Rechenregeln der Arithmetik genügen, also, modern formuliert, der Bereich zu den komplexen Zahlen isomorph ist.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts widmeten sich mehrere Gelehrte aus unterschiedlichen Motiven dem Problem, das Rechnen mit komplexen Zahlen durch eine geometrische Realisierung auf eine sicherere Basis zu stellen, so 1803 L. N. M. Carnot (1753–1823), 1805 A. Buée (1748–1826), 1806 J. R. Argand (1768–1822), 1813 J. F. Français (1775 bis 1833), J. Gergonne (1771–1859) sowie F. J. Servois (1767–1847), 1828/29 J. Warren (1796–1852) und 1830 G. Peacock (1791–1858). Dies führte meist zu Betrachtungen über das Operieren mit gerichteten Strecken, beinhaltete also zugleich die Entwicklung von Elementen der Vektorrechnung. Von großer Bedeutung für die Anerkennung der komplexen Zahlen

war 1831 das Plädoyer von C. F. Gauß zu deren Gunsten in der Selbstanzeige seiner Arbeit über biquadratische Reste, in dem er seine seit der Jugend vertretene Grundansicht zusammenfasste. Er formulierte die bekannte umkehrbar eindeutige Zuordnung der komplexen Zahlen zu den Punkten der Ebene und wollte damit „*die wahre Metaphysik der imaginären Größen in ein neues helles Licht*“ stellen und ihnen das „*völlig gleiche Bürgerrecht*“ wie den reellen Zahlen verschaffen. In der Arbeit prägte Gauß auch die Bezeichnung komplexe Zahl, zuvor sprach man von imaginären, eingebildeten oder unmöglichen Zahlen.

## 6 Arithmetische Definition der komplexen Zahlen und hyperkomplexe Systeme

Nur allmählich wich die Skepsis gegenüber den komplexen Zahlen. So nützlich deren geometrische Veranschaulichung auch war, es fehlte noch eine strenge arithmetische Begründung. Diese wurde 1833/35 von W. R. Hamilton (1805–1865) angegeben und gehörte in den Kontext seiner Studien zum abstrakten Aufbau der Algebra. Hamilton faßte eine komplexe Zahl als ein Paar von reellen Zahlen auf, deren Verknüpfungsgesetze willkürlich gewählt werden können. Bei der Definition der Verknüpfungsregeln für Addition und Multiplikation ließ er sich davon leiten, daß möglichst viele Rechenregeln mit denen der reellen Zahlen übereinstimmen, bzw. sich kein Widerspruch zu dem bisher geübten Umgang mit komplexen Zahlen ergab. Auf diese Weise konstruierte er den Bereich der Zahlenpaare, der ein zu den reellen Zahlen isomorphes Teilsystem enthielt. Fast gleichzeitig, aber unabhängig von Hamilton gab J. Bolyai (1802–1860) ebenfalls eine Definition der komplexen Zahlen als Zahlenpaare. Eine weitere, nichtgeometrische Begründung der komplexen Zahlen präsentierte A.-L. Cauchy (1789–1857), als er sie 1847 als Reste definierte, die in der Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten bei der Division durch  $x^2 + 1$  entstanden. Die Basis bildet das algebraische Verfahren der Restklassenbildung, die übliche Übertragung der Operationen des Grundbereichs auf die Restklassen liefert die Rechenregeln für komplexe Zahlen. Mitte des 19. Jahrhunderts standen somit die komplexen Zahlen auf einer soliden Basis.

Die Suche nach dieser Basis, insbesondere zur geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen, wurde zugleich der Ausgangspunkt weiterführender Überlegungen. Schon Wessel hatte die Idee, eine weitere Einheit einzuführen und einen entsprechenden Kalkül für das Rechnen mit gerichteten Strecken im Raum aufzubauen, den Kalkül also über das Komplexe hinaus ins Hyperkomplexe fortzusetzen. Ähnliches versuchte Hamilton. Nach jahrelangen erfolglosen Bemühungen gelang es ihm 1843, einen Kalkül für dreidimensionale Größen aufzubauen, die Quaternionen, das erste geschlossene System hyperkomplexer Größen.

Quaternionen werden aus den vier Einheiten  $1, i, j$  und  $k$  gebildet, die den Multiplikationsregeln  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  und  $ijk = -1$  genügen.

Die multiplikative Verknüpfung der Quaternionen ist nichtkommutativ. Ein langwieriger Prozeß war zu durchlaufen, ehe Hamilton zu der Einsicht kam, daß beim Übergang von den (zweidimensionalen) komplexen Zahlen zu höherdimensionalen Größensystemen nicht alle Verknüpfungsgesetze der komplexen Zahlen gültig bleiben können. Er entschied sich dafür, die Gültigkeit des Kommutativgesetzes aufzugeben, und bestätigte damit die von Gauß 1831 angedeutete Einsicht, daß es keine Größensysteme von mehr als zwei Dimensionen geben kann, die allen Grundregeln der Arithmetik genügen.

Mit Hamiltons Quaternionen und der 1844 erschienen Ausdehnungslehre von H. Grassmann (1809–1877) begann die Geschichte der hyperkomplexen Systeme (Algebren), deren Studium ein wichtiges Teilgebiet der Algebra geworden ist. Viele Fragen im Frühstadium der Theorie hyperkomplexer Systeme wurden durch die komplexen Zahlen inspiriert und sollten die Unterschiede analysieren, die die neuen Größensysteme zu den bekannten Zahlbereichen aufwiesen. Zugleich wurden aber die komplexen Zahlen in einen größeren Zusammenhang gestellt, in dem „*ihre wahre Bedeutung in das volle Licht gesetzt*“ wurde. In diesem Rahmen fand die fast vier Jahrhunderte dauernde Entwicklung des Begriffs der komplexen Zahl mit den abstrakten Charakterisierungen des Körpers der komplexen Zahlen ihren Abschluss.

### Literatur:

- Tropicke, J.: *Geschichte der Elementarmathematik. Band 1: Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet von K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. Berlin / New York, 1980.
- Pieper, H.: *Die komplexen Zahlen. Theorie · Praxis · Geschichte*. Berlin, 1984.
- Cajori, F.: *A History of Mathematical Notations*. New York, 1993.

## Die „*Elemente*“ des Euklid (Karl-Heinz Schlote)

Die „*Elemente*“ des Euklid gehören nicht nur zu den herausragenden Werken der Mathematikgeschichte, sondern sind auch in Philosophie und Kulturgeschichte von großer Bedeutung. Im folgenden sollen Inhalt und Geschichte dieses Werkes überblicksartig dargestellt werden.

Die „*Elemente*“ bilden Euklids Hauptwerk. Obwohl wir über den Inhalt der „*Elemente*“ recht gut informiert sind, besitzen wir nur sehr bescheidene Kenntnisse über den Autor und die Entstehungsgeschichte. Von Euklid ist nicht eine einzige Tatsache bekannt, die sicher belegt ist. Im allgemeinen wird angenommen, dass Euklid zwischen 360 und 280 v. u. Z. gelebt hat und bereits als etablierter und berühmter Mathematiker in der Gründungs- oder Anfangsphase an das Museion in Alexandria gekommen ist.

Alexandria war in den Jahren 332 bis 330 v. u. Z. als eine der Pflanzstädte von Alexander dem Großen im Nildelta gegründet worden. In wenigen Jahren entwickelte sich die Stadt, nach dem Tode Alexanders durch den ersten Ptolemäerkönig Ptolemaios I. Soter weiter gefördert, zu einem neuen Zentrum der antiken Welt. Ptolemaios I. war es auch, der noch vor 300 v. u. Z. nach dem Vorbild der Akademie Platons und des Lykeions des Aristoteles das Museion gründete, eine wissenschaftliche Forschungs- und Lehrstätte, die zugleich der Repräsentation des Herrschers diene. Das Museion verfügte über Hörsäle, Arbeitsräume, eine Sternwarte, einen botanischen und einen zoologischen Garten und vieles mehr. Seine Gründung markiert zugleich den Beginn einer etwa 200jährigen Blütezeit der antiken Wissenschaften. Euklid gilt als Begründer der mathematischen Schule von Alexandria. Ob er allerdings all seine Werke, insbesondere die „*Elemente*“, in Alexandria verfasst hat, ist unklar.

Vor Euklid hat es mindestens drei Verfasser von „*Elementen*“ gegeben. Zwei dieser „*Elemente*“, die von Leon (um 370 v. u. Z. lebend) und von Theudios von Magnesia (um 340 v. u. Z. lebend), sind vermutlich im Umfeld der Platonischen Akademie entstanden und dienten der Ausbildung an dieser Lehrstätte. Bezüglich des grundsätzlichen Aufbaus und des Anliegens dürften sie für Euklid ein Vorbild gewesen sein. Die „*Elemente*“ dienten wohl vor allem Lehrzwecken und fassten das mathematische Grundwissen zusammen, dass man für weitergehende mathematische Forschungen haben sollte. Damit tritt uns Euklid in den „*Elementen*“ weniger als originaler Forscher entgegen, sondern vielmehr als geistreicher Systematiker, der geschickt aus bekanntem Wissen auswählt, es mit eigenen Resultaten kombiniert und dies mustergültig zusammenfügt. Bei aller Kritik, die spätere Generationen an einzelnen Teilen der „*Elemente*“ geübt haben, bleibt doch unbestritten, dass Euklid mit diesem Werk ein über mehr als 2000 Jahre wirkendes methodisches Vorbild geschaffen hat. So ist die heutige Gliederung mathematischer Darlegungen in Voraussetzung-Behauptung-Beweis nur eine verkürzte Form des von Euklid praktizierten Vorgehens. Die Einsicht, dass nicht von jedem Satz auch dessen Umkehrung richtig ist, der indirekte Beweis und weitere technische Beweismittel sind eng mit den „*Elementen*“ verknüpft.

### 1 Aufbau und Inhalt der „*Elemente*“

Die „*Elemente*“ sind in 13 Bücher gegliedert, die meist mit römischen Ziffern nummeriert werden. Buch bedeutet im heutigen Sprachgebrauch so viel wie Kapitel. Die folgende Übersicht skizziert den Inhalt der einzelnen Bücher und die vermutliche Herkunft, wie sie von der neuzeitlichen Forschung ermittelt wurde.

Buch	Inhalt	inhaltliche Herkunft
I	Vom Punkt bis zum Satz von Pythagoras	6./5. Jh. v. u. Z., insbes. Pythagoreer
II	„Geometrische Algebra“	6./5. Jh. v. u. Z., insbes. Pythagoreer
III	Kreislehre	6./5. Jh. v. u. Z., insbes. Pythagoreer
IV	Dem Kreis ein- und umbeschriebene Vielecke	6./5. Jh. v. u. Z., insbes. Pythagoreer
V	Proportionenlehre	Eudoxos
VI	Anwendung von Buch V auf Planimetrie	unbekannt
VII	Teilbarkeitslehre, Primzahlen	Pythagoreer
VIII	Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen	Pythagoreer
IX	Lehre von Gerade und Ungerade	Pythagoreer
X	Quadratische Irrationalitäten	Theaitetos
XI	Elementare Stereometrie	z. T. 6./5. Jh. v. u. Z.
XII	Volumina, Exhaustionsmethode	Eudoxos
XIII	Reguläre Polyeder	Theaitetos

Die einzelnen Bücher sind streng gegliedert und beginnen meist mit den Definitionen der Grundbegriffe. Diese Definitionen sind später häufig diskutiert, kritisiert sowie kommentiert und meist als schwächster Teil der „*Elemente*“ eingeschätzt worden, da sie keine Definitionen im Sinne der mathematischen Logik sind. Dieser Vorwurf ist formal richtig. Aber abgesehen davon, dass dabei Maßstäbe der modernen Mathematik auf die Antike übertragen werden, ergibt die Mehrzahl der Definitionen durch geringe Veränderungen korrekte Nominaldefinitionen. Schließlich sollte man auch beachten, dass der beschreibende Charakter der Definitionen dem Lehrbuchstil, also pädagogischen Absichten geschuldet sein könnte.

Den Definitionen folgen dann im Buch I einige Postulate und Axiome, wobei diese Unterscheidung den wissenschaftstheoretischen Anschauungen über den Aufbau einer beweisenden Wissenschaft und dem damals verbreiteten philosophischen Argumentationsmuster folgt. Axiome formulieren allgemeine Aussagen, die den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden und über deren Anerkennung kein Zweifel besteht. Postulate sind fachspezifische Aussagen, die vom Autor als Voraussetzungen angenommen werden, obwohl teilweise ein Beweis möglich ist, die aber beim Lernenden auch auf Widerspruch stoßen können.

Die ersten drei Postulate des Euklid sichern die Ausführbarkeit einiger geometrischer Grundoperationen. Sie legen damit die Verfahren fest, nämlich die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, mit denen im folgenden konstruktive Existenzbeweise für geometrische Aussagen geführt werden sollen. Nach dem beweisbaren vierten Postulat über die Gleichheit aller rechten Winkel folgt das berühmte sog. Parallelenpostulat,

*„dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind“.*

Dieses Postulat, das (zu einer vorgegebenen Geraden) die Existenz höchstens einer Parallelen durch einen nicht auf der Geraden liegenden Punkt fixiert, ist schon in der Antike häufig diskutiert worden. Darauf wird noch zurückzukommen sein.

Das System von Postulaten ist auch unter Berücksichtigung der anschließenden logischen Axiome nicht vollständig. Es fehlt eine Aussage, die die Existenz eines Schnittpunktes zweier Kreise bzw. eines Kreises mit einer Geraden regelt. Mindestens eine dieser Aussagen ist notwendig, um die Schnittverhältnisse vollständig zu klären. Doch in diesen Fällen lässt sich Euklid wie in allen Fragen, in denen die Anordnung der geometrischen Objekte eine Rolle spielt, von der Anschauung leiten und verzichtet auf eine axiomatische Festlegung. Auf dieser Basis entwickelt er dann grundlegende Sätze der ebenen Geometrie.

Zwei weitere inhaltliche Komponenten der „*Elemente*“ seien noch hervorgehoben. Zum ersten der Aufbau einer allgemeinen Proportionenlehre (Buch V). Diese Proportionentheorie geht auf Eudoxos von Knidos (um 408–350 v.u.Z.) zurück und bestimmt den Begriff der Proportion und der Anordnung von Verhältnissen  $a/b$  für beliebige paarweise gleichartige Größen, also insbesondere für inkommensurable Größen. Wie Euklid dann in Buch VI zeigte, ist eine wichtige Anwendung dieser Theorie die Ähnlichkeitslehre in der ebenen Geometrie, es ist aber nicht die einzige. Aus dieser Sicht stecken die arithmetischen Bücher VII bis IX dann den Rahmen ab, der mit der älteren Proportionentheorie für ganze Zahlen ausfüllbar ist. Sie enthalten zugleich zahlreiche interessante arithmetische Resultate, wie den Satz über vollkommene Zahlen, die Erklärung des Prinzips der Wechselwegnahme, später als Euklidischer Algorithmus bekannt, und die klassische Definition der Zahl.

Des weiteren sei noch das Buch X genannt, das sich durch seinen Schwierigkeitsgrad deutlich von den anderen unterscheidet. Es enthält die Klassifikation quadratischer Irrationalitäten in geometrischer Form, und zwar jener, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind – oder wie es ein späterer Kommentator ausdrückte: Es wird die Frage nach den Wurzeln aus den Zahlen, nach den Wurzeln der Wurzeln aus ihnen, der Summe der Wurzeln aus ihnen, den Wurzeln einer Summe von Wurzeln, der Differenz von Wurzeln und der Wurzeln aus ihren Differenzen erklärt. (Schreiber, S. 90) In diesem Rahmen sowie im Buch XII benutzte Euklid auch das später nach Archimedes und Eudoxos benannte Axiom des Messens.

## 2 Zur Rezeption der „*Elemente*“

Der Erfolg der „*Elemente*“ muss in der Antike sehr groß gewesen sein. Dafür spricht die Tatsache, dass die Resultate der 300 Jahre voreuklidischer Mathematik sehr rasch verdrängt wurden und heute davon keine Originalfassungen mehr bekannt sind, aber auch, dass nach Euklid kein den „*Elementen*“ vergleichbares Werk verfasst wurde. Dies bedeutet nicht, dass der Inhalt der „*Elemente*“ lange Zeit unübertroffen geblieben wäre. Im Gegenteil, in der nach Euklid folgenden Blütezeit der antiken Mathematik wurden Euklids Volumenberechnungen aus Buch XII sehr bald von Archimedes (um 287–212 v.u.Z.) wesentlich erweitert. Wenig später brachte Apollonios von Perge (um 262–190 v.u.Z.) die Kegelschnittlehre zu einem vorläufigen Abschluss, ein Gebiet, das von Euklid nicht in die „*Elemente*“ aufgenommen worden war. Die arithmetisch-zahlentheoretischen Bücher VII–IX wurden nach dem 1. Jh. zunehmend von der Arithmetik des Nikomachos von Gerasa (um 100 lebend) verdrängt. Die Nikomachossche Arithmetik, die grundlegende Ergebnisse der neupythagorei-

schen Schule zusammenfasste und mit deren philosophischen Ansichten verband, stellt die erste rein zahlentheoretische griechische Schrift dar und unterscheidet sich dabei deutlich von Euklids Darlegungen zu diesem Thema, sowohl im Inhalt als auch in der Methode.

Eine interessante Weiterentwicklung erfuhr Euklids Theorie der regulären Polyeder aus Buch XIII, die mit dem Satz endet, dass es nur die fünf regulären Polyeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder gibt. Archimedes führte Euklids Resultate in seiner Theorie der halbbregulären Polyeder weiter, und schließlich erschienen noch zwei Abhandlungen, die später, als Buch XIV und XV der „*Elemente*“ bezeichnet, als direkte Fortsetzung des Werkes betrachtet wurden.

Buch XIV, im 2. Jh. v.u.Z. vom Alexandriner Hypsikles (2. Jh. v.u.Z.) verfasst, beinhaltet sieben Sätze über Dodekaeder und Ikosaeder, z.B. dass das Verhältnis der Volumina der beiden Körper eine mit Zirkel und Lineal konstruierbare Größe ist. Das Buch XV entstand etwa im 6. Jh., der Verfasser ist nicht genau bekannt. Es behandelt das Einbeschreiben gewisser regulärer Polyeder ineinander sowie einfache kombinatorische Relationen zwischen der Zahl der Ecken, Kanten, Flächen etc.

Die verbreitetste Art der Aneignung und Auseinandersetzung mit den „*Elementen*“ war bis zum Beginn der Neuzeit die Kommentierung einzelner Bücher oder des Gesamtwerkes. So sind aus der Spätantike die Kommentare von Geminos (1. Jh. v.u.Z.), Heron (vermutlich 1. Jh.), Porphyrios (3. Jh.), Pappos (4. Jh.) (zu Buch X), Proklos Diadochos (410–485) (zu Buch I) und Simplicios (6. Jh.) bekannt, aber teilweise nur fragmentarisch überliefert. Von den erhalten gebliebenen Kommentaren ist der des Proklos mit über 300 Seiten am ausführlichsten und enthält viele historisch und mathematisch interessante Einzelheiten. Trotzdem ist er unverkennbar philosophisch orientiert und hat als Hauptziel die Darstellung und Interpretation der „*Elemente*“ im Sinne des Neoplatonismus.

An dieser Stelle sei eine Bemerkung zur Überlieferung des Textes der „*Elemente*“ angefügt. Aus der Zeit vor dem 4. Jh. (u.Z.!) sind heute etwa 120 Textzeilen der „*Elemente*“ bekannt, von denen die Hälfte nicht mit dem von J. L. Heiberg (1854–1928) und H. Menge edierten Standardtext übereinstimmt. Lange Zeit galt die von Theon von Alexandria (um 330–400) um 370 angefertigte Bearbeitung der „*Elemente*“ als der älteste vollständige Text, wobei klar ermittelt werden konnte, dass Theon in seinem Bemühen um eine verständliche Fassung des Textes zusätzliche Zwischenschritte, Hilfssätze und Korollare aus Sätzen angefügt hatte. Auch dies stützt die Annahme, dass die „*Elemente*“ über längere Zeit als Lehrmaterial dienten und als Mitschriften in verschiedenen Versionen im Umlauf waren, ehe sich ein kanonischer Text herausbildete. Erst 1808 wurde ein Manuskript byzantinischen Ursprungs entdeckt, das eine Textfassung der „*Elemente*“ aus der Zeit vor Theon enthielt. Das Manuskript, das aus dem 10. Jh. stammt und heute in der Bibliothek des Vatikans aufbewahrt wird, bildete dann die Grundlage für den heute allgemein anerkannten griechisch-lateinischen Text der „*Elemente*“ von Heiberg und Mende. Es sei noch vermerkt, dass man inzwischen zahlreiche weitere Handschriften gefunden hat, die z.T. auch älter als das obige Manuskript sind, deren Text aber nicht auf Vorlagen aus vortheonischer Zeit zurückgreift. Einige kürzlich erzielte Forschungsergebnisse lassen jedoch das von Heiberg benutzte Manuskript und seine Beziehung zur Theonschen Fassung der „*Elemente*“ in einem neuen Licht erscheinen, so dass viele Fragen wieder offen sind. Ein abschließendes Urteil steht noch aus.

Die ersten lateinischen Übersetzungen von Adelhard von Bath (um 1075–1160) um 1120 beruhten, wie auch die fast zeitgleiche von Gerard von Cremona (1114–1187) sowie die nachfolgenden, auf arabischen Quellen. Bei den arabisch und persisch schreibenden Gelehrten, die einen großen Anteil an der Tradierung und Weiterentwicklung der antiken Wissenschaften haben, genossen die „*Elemente*“ ebenfalls hohes Ansehen. Ab dem Ende des 8. Jhs. wurden die „*Elemente*“ von ihnen mehrfach übersetzt, bevor etwa 100 Jahre später Erklärungen, Interpretationen, Ergänzungen und Zusammenfassungen, also Bearbeitungen der verschiedenen Colours hinzukamen. Im Mittelpunkt standen dabei mathematische und didaktische Gesichtspunkte weniger philologische, auf Texttreue ausgerichtete Motive. Die Beschäftigung mit Euklid regte diese Mathematiker häufig zu eigenen weiterführenden Forschungen an – so zur algebraischen Lösung geometrischer Aufgaben, zu Bemühungen um die Arithmetisierung von Buch X, was einerseits zu einer Quelle für die Erweiterung des Zahlbegriffs von den natürlichen zu den positiven reellen Zahlen wurde und andererseits bis zu Versuchen zur Klassifikation kubischer Irrationalitäten führte, zur bewussten Umsetzung von Sätzen des Buches II in algebraische Formeln und zur Verwendung geometrischer Konstruktionen zur Lösung algebraischer Gleichungen im Falle kubischer Gleichungen. Insgesamt hatte die Beschäftigung mit Euklid zur Folge, dass eine fruchtbare Wechselbeziehung zwischen der Arithmetisierung der „*Elemente*“ und dem Bestreben islamischer Mathematiker entstand, erzielte Lösungen theoretisch zu begründen.

Im christlichen Europa sank nach dem Zerfall des Weströmischen Reiches das allgemeine Niveau der Wissenschaften und damit auch die Rezeption antiker Wissenschaften auf einen Tiefpunkt. Bezüglich Euklid verdient einzig der Römer Boethius (um 480–524) erwähnt zu werden, der einige dürftige Auszüge aus den „*Elementen*“ anfertigte, die auf Grund seiner Lebensumstände eine besondere Wertschätzung durch die Kirche erfuhren. Das Anknüpfen an Euklid war fast ausschließlich von einem philosophischen Interesse an den mathematischen Begriffen bestimmt und vom methodischen Interesse,

die Mathematik als Vorbild für den Aufbau einer deduktiv vorgehenden Wissenschaft zu betrachten. Bis ins 18. Jh., ja in manchen Ländern bis ins 19. Jh., standen im Lehrbetrieb an den Schulen und Universitäten nicht die Beherrschung der mathematischen Inhalte der „*Elemente*“, sondern die oben genannten Aspekte mit einer logischen Schulung des Verstandes sowie einer allgemeinen Übung der philosophischen Disputation und der klassischen Sprachen im Vordergrund der Aneignung und Auseinandersetzung mit den „*Elementen*“. Erst mit der Renaissance kam auch ein steigendes mathematisches Interesse hinzu. Doch diese breite Interessenlage bedingte nicht zuletzt, dass sich immer wieder Gelehrte der Übersetzung dieses Werkes widmeten und um eine Verbesserung des vorliegenden Textes mühten. Die erste gedruckte Ausgabe der „*Elemente*“ erschien 1482 in Venedig auf der Basis der von Johannes Campanus (um 1210–1296) um 1255 angefertigten Übersetzung aus dem Arabischen, 1505 folgte eine Neuübersetzung aus dem Griechischen durch B. Zamberti (um 1473–?) und bereits 1544 die erste Ausgabe in einer Nationalsprache, nämlich durch N. Tartaglia (um 1500–1557) in Italienisch. Bis zum Ende des 16. Jh. erschienen über 110 Druckausgaben der „*Elemente*“.

### 3 Das Parallelenpostulat

Bereits in der Antike ist das Parallelenpostulat mehrfach kommentiert worden, und vermutlich hat es schon vor Euklid eine Diskussion um Fragen der Parallelität gegeben. Sehr schnell erkannte man, dass die Annahme des Postulats einschneidend und keineswegs evident war. Es begann eine bis ins 19. Jh. fortlaufende Kette von Versuchen, die mit dem Postulat gegebene Definition der Parallelität zweier Geraden durch eine einfachere zu ersetzen, sei es, dass man einen Beweis des Postulats anstrebte und dabei meist stillschweigend neue Voraussetzungen einführte, oder dass man explizit eine Veränderung der Voraussetzungen vornahm. Derartige „Beweise“ gaben Archimedes, Ptolemaios (um 85–160), Poseidonios

(um 135–51 v.u.Z.) und Proclus. Poseidonios charakterisierte z.B. um 100 v.u.Z. die Parallelen zur Geraden  $g$  als äquidistante Geraden, was aber die Forderung impliziert, dass die zu  $g$  äquidistanten Kurven stets wieder gerade Linien sind. (Errichtet man in jedem Punkt einer Geraden  $g$  die Senkrechte und trägt darauf zu einer Seite von  $g$  eine Strecke fester Länge ab, so bilden die Endpunkte einer Kurve, eine sog. Äquidistante zu  $g$ .) Eine weitere wichtige Idee, die bei vielen Versuchen, das Parallelenpostulat abzuleiten, eine Rolle spielt, scheint von Simplicios (6 Jh.) zu stammen. Er wählte einen der beiden Innenwinkel der geschnittenen Geraden als Rechten (Der andere Winkel muss dann spitz sein!) und wollte dann zeigen, dass die Gerade  $g$ , die mit der schneidenden Geraden den rechten Winkel bildet, die andere geschnittene Gerade  $h$  trifft. Dazu verschaffte er sich eine (zu  $g$  parallele) Gerade, die  $h$  schneidet und vergrößerte das entstehende Dreieck, bis  $g$  im Innern liegt.

Diese beiden Grundgedanken traten in den vielen Arbeiten zum Parallelenpostulat immer wieder in verschiedenen Varianten auf. Hervorzuheben sind besonders einige Arbeiten islamischer Gelehrter, etwa von al-Gauhari (1. Hälfte 9. Jh.), Tabit ibn Qurra (826/27–901), Ibn al-Haitham (965–um 1039), al-Hayyam (1048?–1131?) und Nasir al-Din al-Tusi (1201–1274). Ibn al-Haitham stellte wohl erstmals explizit die Äquivalenz zwischen der Gültigkeit des Parallelenpostulats und der Aussage her, dass die Winkelsumme im Viereck  $360^\circ$  beträgt. Weiterhin vermerkte er, dass eine Gerade, die nicht durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht, aber eine Dreiecksseite schneidet, auch eine der beiden anderen Dreiecksseiten schneidet. Diese Feststellung trat implizit und in ähnlicher Form schon bei al-Gauhari auf und wurde 1885 von M. Pasch (1843–1930) als Axiom der ebenen Geometrie formuliert. Die obige Äquivalenz zur Winkelsumme im Viereck war Ausgangspunkt für al-Hayyams Betrachtungen. Er untersuchte im sog. Saccheri-Viereck, welche Konsequenzen sich für die Längenverhältnisse ergeben, wenn neben den beiden rechten Winkeln zwei gleiche spitze bzw. stumpfe Winkel im Viereck angenommen werden. Ein Saccheri-Viereck ABCD ist ein Viereck mit rechten Winkeln bei A und B sowie mit gleich langen Seiten  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$ . Al-Hayyam erzielte wichtige Resultate zur späteren nichteuklidischen Geometrie und ging weit über seine Vorgänger hinaus. Obwohl al-Hayyam die Richtigkeit seiner Ergebnisse in Frage stellte, wurden sie von Al-Tusi aufgegriffen und fortgesetzt. Auf diese Weise konnten dann G. Saccheri (1667–1733), J. Wallis (1616–1703) u.a. daran anknüpfen.

Die beiden letztgenannten gehörten zu jenen Mathematikern, die weitere zum Parallelenpostulat äquivalente Aussagen ableiteten. So verifizierte Wallis die Äquivalenz zu dem Satz, dass zu jedem Dreieck ein ähnliches beliebiger Größe existiert, oder Saccheri, J. H. Lambert (1728–1777) und A.-M. Legendre (1752–1833) zu: Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten. Saccheri und Lambert versuchten 1733 bzw. 1766, durch eine indirekte Beweisführung die Richtigkeit des Parallelenpostulats zu zeigen, und leiteten wichtige Einsichten der nichteuklidischen Geometrie ab. Während Saccheri auf Grund einer Fehlinterpretation bzw. eines Fehlschlusses glaubte, das Parallelenpostulat bestätigt zu haben, deutet sich in der erst posthum 1786 publizierten Arbeit Lamberts die Möglichkeit einer widerspruchsfreien Geometrie an, in der das Parallelenpostulat nicht gilt.

So beginnt sich am Ende des 18. Jhs. nach rund 2000 Jahren Forschung die Erkenntnis durchzusetzen, dass das Parallelenpostulat (oder ein dazu äquivalentes), ein von den anderen Postulaten unabhängige Forderung darstellt. Es dauerte ein weiteres Jahrhundert, bis die daraus folgende Tatsache, dass man damit auch Geometrien widerspruchsfrei aufbauen kann, in

denen das Parallelenpostulat nicht gilt, von den Mathematikern allgemein anerkannt wurde. Dieser grundlegende Wandel erforderte nicht nur eine neue mathematische Sicht auf Fragen der Geometrie, sondern auch die Auseinandersetzung mit den vorherrschenden philosophischen Vorstellungen. Die Pionierrolle in diesem Prozess kommt C. F. Gauß (1777–1855), J. v. Bolyai (1802–1860) und N. A. Lobatschewski (1792–1856) zu. Gauß erkannte um 1815 als erster, dass die Existenz nichteuklidischer Geometrien mathematisch widerspruchsfrei ist, publizierte bekanntlich diese Einsicht aber nicht. Unabhängig veröffentlichten dann 1829/30 Lobatschewski und 1832 Bolyai jeweils eine Geometrie, in der das Parallelenpostulat nicht gilt, und behaupteten deren Widerspruchsfreiheit. Aber erst als von E. Beltrami (1835–1900) und F. Klein (1849–1925) Ende der 60er Jahre (1868 bzw. 1871) erste Modelle für die nichteuklidischen Geometrien angegeben wurden, wichen die letzten Zweifel an dieser Theorie.

Die Wirkungsgeschichte der „*Elemente*“ des Euklid ist viel reichhaltiger, als in diesem kurzen Beitrag dargestellt werden konnte. Beispielsweise wurden die Fragen der Grundlagen und axiomatischen Begründung der Geometrie fast völlig ausgeklammert. Viele technische Beweismittel und grundlegende Aspekte der modernen Mathematik haben ihre Wurzeln in den „*Elementen*“. Die Vielseitigkeit der Anregungen, die von den „*Elementen*“ ausgehen, bildet die Basis für die andauernde Aktualität des Werkes.

#### **Literatur:**

- Gericke, H.: *Mathematik in Antike und Orient*. Berlin/Heidelberg/New York, 1984.
- Schreiber, P.: *Euklid. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner*. Bd. 87, Leipzig, 1987.
- Wußing, H.: *Mathematik in der Antike*. Leipzig, 1962

# Leonhard Euler

(1707 bis 1783)

„LEONHARD EULER. 1707–1783. Mathematiker, Physiker, Ingenieur, Astronom und Philosoph. Verbrachte in Riehen seine Jugendjahre. Er war ein großer Gelehrter und ein gütiger Mensch.“



So lautet der Text einer Gedenktafel am Hause Kirchgasse 8 in Riehen bei Basel. Leonhard Euler war am 15. April 1707 in Basel geboren worden; bald darauf hatte der Vater Paul Euler, ein reformierter Pfarrer, das Pfarramt in Riehen übernommen. Schon im Alter von 13 Jahren nahm Leonhard das Studium an der Universität Basel auf, ursprünglich zum Theologen bestimmt. Doch der junge Mann interessierte sich brennend für Mathematik und hatte das Glück, bei einem der führenden Mathematiker der Zeit, bei dem Baseler Mathematikprofessor Johann Bernoulli, Privatunterweisungen zu erhalten und in die noch junge Infinitesimalmathematik eingeführt zu werden. Schon 1726 erschienen Eulers erste mathematische Arbeiten im Druck.

Inzwischen war 1725 in St. Petersburg die russische Akademie der Wissenschaften ins Leben gerufen worden. Aus der Hochburg der Mathematik, aus Basel, gingen zwei Söhne von Johann Bernoulli, Daniel und Niklaus Bernoulli, sowie Jakob Herrmann als Professoren nach St. Petersburg.

Allseits empfohlen folgte ihnen 1727 Euler, wurde zunächst Adjunkt, dann 1731 Professor der Physik und Ordentliches Akademiemitglied und schließlich 1733, als Nachfolger des wieder nach Basel zurückgekehrten Daniel Bernoulli, Professor der Mathematik.

Euler heiratete 1734 – aus der Ehe mit Katherina Gsell gingen 13 Kinder hervor, von denen freilich nur drei Söhne den Vater überlebten –, verlor 1738 als Folge einer lebensgefährlichen Erkrankung das rechte Auge, nahm aber trotzdem an der Petersburger Akademie und im wissenschaftlichen Leben Russlands eine herausragende Rolle ein, beispielsweise bei der geographischen Erschließung des Riesenreiches.

Innenpolitische Unruhen beim Machtkampf um den Zarenthron ließen auch die Lage der Akademie unsicher werden. Daher und aus familiären Gründen folgt Euler 1741 einer Berufung nach Berlin, um auf Wunsch des preußischen Königs Friedrich II. die Wiederbelebung der Berliner Akademie zu unterstützen. Wegen kriegischer Verwicklungen zog sich dies jedoch noch bis 1746 hin. Der Franzose Maupertuis – Friedrich schätzte französische Kultur und Wissenschaft über alle Maßen – wurde Akademiepräsident und Euler wurde Direktor der mathematischen Klasse. Trotz überragender wissenschaftlicher und praktischer Tätigkeit blieb das Verhältnis zum König kühl. Allerlei Misshelligkeiten an der Akademie, noch verstärkt durch das Unverständnis des Königs für reine Mathematik, führten dazu, dass Euler 1766 nach St. Petersburg zurückkehrte; der Kontakt dorthin war ohnedies sehr eng geblieben. Von der russischen Zarin Katharina II. mit großen Ehren und finanziellen Zuwendungen empfangen, wirkte Euler – seit 1771 fast vollständig erblindet, aber von seinem Sohn Johann Albrecht und jüngeren Mathematikern bei Niederschrift und Publikation seiner Arbeiten unterstützt – unermüdlich bis zu seinem Tode am 18. September 1783.

Euler hat ein gewaltiges wissenschaftliches Werk hinterlassen; er war der weitaus produktivste Mathematiker der Weltgeschichte. Dabei macht Mathematik nur etwa die Hälfte seiner Publikationen aus. Das Verzeichnis seiner Bücher und wissenschaftlichen Abhandlungen umfasst mehr als 850 Titel. Die bisher (seit 1907) erschienenen Bände seiner „Opera omnia“ (Gesammelte Werke) füllen schon mehr als 40 Quartbände; weitere Bände sind in Vorbereitung. Dazu kommen rund 3 000 Briefe wissenschaftlichen Inhaltes.

Euler hat auf allen Gebieten der Mathematik herausragende, wegbereitende Ergebnisse erzielt und zugleich der Mathematik eine Fülle neuer Anwendungen in Astronomie, Mechanik, Physik, Schiffbau, Geodäsie, Ballistik und Turbinenbau eröffnet.

Euler schuf den modernen Typ des Lehrbuches, das bei höchster Klarheit der Darstellung vom Elementaren bis zum aktuellen Forschungsstand führt. Er hat eine ganze Serie von Lehrbüchern geschrieben, die die nachfolgenden Mathematikergenerationen prägte. Aus der ersten Petersburger Periode stammen u. a. die „Mechanica sive motus scientia analytice exposita“ (2 Bände, 1736), in der erstmals die Mechanik systematisch mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung dargestellt wird, sowie Abhandlungen zur Musiktheorie und zur Schiffstheorie. In den 25 Jahren der Berliner Zeit entstanden die wesentlichen Publikationen zur Variationsrechnung, eine Einführung in die Infinitesimalmathematik (1748), Veröffentlichungen zur Differentialrechnung („Institutiones calculi differentialis“, 2 Bände, 1755) und zur Theorie der Mondbewegung, eine dreibändige Sammlung philosophischer Briefe (1768) u. a. m. In der zweiten Petersburger Periode schuf Euler u. a. eine dreibändige Integralrechnung (1768–1770), eine umfassende Darstellung der Optik (1769–1771) und eine berühmt gewordene „Vollständige Anleitung zur Algebra“ in zwei Bänden (1770, vorher zunächst in russischer Sprache).

Es ist hier unmöglich, die naturwissenschaftlichen und technischen Leistungen von Euler aufzuzählen. Ebensowenig kann an dieser Stelle die Forschertätigkeit von Euler vollständig beschrieben werden, da seine Ergebnisse weit jenseits der heutigen Schulmathematik liegen. Nur einiges sei angedeutet: Weiterentwicklung des Funktionsbegriffes, Eröffnung des Zuganges zur Theorie der Funktionen komplexer Variabler, Lösungen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, u. a. beim schwierigen Problem der schwingenden Saite, Etablierung der Variationsrechnung als einer neuen selbstständigen mathematischen Disziplin, analytische Zahlentheorie, kombinatorische Topologie, u. a. mit dem berühmten Königsberger Brückenproblem und dem eulerschen Polyedersatz.

Mehr als 50 Begriffe, Sätze und Methoden sind nach Euler benannt. Durch ihn wurde die Behandlung von astronomischen und physikalischen Problemen mit den Methoden der Infinitesimalmathematik zum Gemeingut der Mathematiker und Naturforscher.

Neben Descartes und Leibniz gehört Euler zu den Hauptfindern mathematischer Begriffe und Symbole. Auf ihn gehen u. a. zurück die jetzigen Bezeichnungen der trigonometrischen Funktionen, das allgemeine Funktionssymbol  $f(x)$ , die Symbole  $e$  für die Basis der natürlichen Logarithmen und  $i$  für die Einheit der imaginären Zahlen, das Differenzzeichen und das Summenzeichen.

Euler war von heiterem Gemüt und zudem von höchster Konzentrationskraft. Enkel auf seinem Schoße haltend, widmete er sich zugleich abstraktesten Forschungen. Er besaß ein fast unglaublich gutes Gedächtnis. Seine Ideen gab er gern und reichlich an andere weiter; nur bei Angriffen der „Freigeister“ auf seinen tief verwurzelten christlichen Glauben verstand er keinen Spaß.

Den Mathematikern des 19. Jahrhunderts galt Euler als Vorbild schlechthin. Von Gauß stammt der Ausspruch: „Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden.“

*(Hans Wußing)*

# Christian Felix Klein

(1849 bis 1925)



Felix KLEIN wurde am 25. April 1849 als Sohn des persönlichen Sekretärs des Düsseldorfer Regierungspräsidenten in Düsseldorf geboren. Nach dem ersten Unterricht durch seine Mutter und dem Besuch einer Privatschule sowie des humanistischen Gymnasiums in seiner Geburtsstadt begann er 1865 ein Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Bonn. Sein Hauptinteresse galt zunächst der Physik. Bereits 1866 wählte ihn J. PLÜCKER (1801–1868) zum Vorlesungsassistenten für seine Physikvorlesungen. Durch PLÜCKER, der durch bedeutende Arbeiten zur Physik und zur Mathematik hervorgetreten war, lernte KLEIN u. a. auch dessen „Liniengeometrie“ kennen und widmete sich von da an selbst mit großer Intensität Fragen der projektiven Geometrie und ihrer Weiterentwicklung.

Nach der Dissertation zur Klassifikation der Linienkomplexe

2. Grades setzte KLEIN, im Bestreben, möglichst viele verschiedene mathematische Schulen kennen zu lernen, seine Studien 1869 in Göttingen, Berlin und Paris fort. Nachdem er Paris wegen des Deutsch-Französischen Krieges vorzeitig verlassen musste, absolvierte er einen kurzen Militärdienst und habilitierte sich Anfang 1871 in Göttingen. In jener Zeit führte er weitere Untersuchungen zur projektiven Geometrie durch und beschäftigte sich mit der Konstruktion geometrischer Gebilde. Diese Überlegungen wurden der Ausgangspunkt für die Einrichtung von Modellsammlungen, die KLEIN später als Professor an seinen Wirkungsstätten anlegte. Seine wichtigsten Forschungsergebnisse waren jedoch die projektive Begründung der nichteuklidischen Geometrien, also jener Geometrien, in denen das Parallelenpostulat nicht erfüllt ist, und die Systematisierung der Geometrien im Rahmen des „Erlanger Programms“. Die nichteuklidischen Geometrien gehörten zu diesem Zeitpunkt nicht zum Allgemeingut der Mathematiker. KLEIN knüpfte nun an die von Chr. V. STAUDT (1797–1867) ohne Benutzung metrischer Elemente eingeführten projektiven Koordinaten an und konstruierte für die hyperbolische Geometrie ein Modell in der euklidischen Ebene. Mit diesem Modell trug er wesentlich zur Anerkennung der mathematischen Existenz nichteuklidischer Geometrien bei, auch wenn die philosophischen Diskussionen noch bis ins 20. Jahrhundert andauerten.

1872 wurde KLEIN Professor an der Universität Erlangen. In seiner Antrittsvorlesung, die er als „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ publizierte und die als „Erlanger Programm“ bekannt wurde, demonstrierte er seine Fähigkeit, Anregungen aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik aufzunehmen und zu neuen Resultaten vorzudringen. Zusammen mit dem Norweger S. LIE (1842–1899) hatte er während des gemeinsamen Parisaufenthalts wichtige Einsichten in die Gruppentheorie erzielt. Mit gruppentheoretischen Mitteln gelang es KLEIN, scheinbar divergierende Richtungen der Geometrie unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen. Jede Geometrie charakterisierte er durch eine Gruppe von Transformationen, die die bestimmenden Eigenschaften der jeweiligen Geometrie unverändert ließen. Das „Erlanger Programm“ übte einen beträchtlichen Einfluss auf die weiteren Forschungen zur Geometrie aus und hat insbesondere die Studien zum axiomatischen Aufbau der Geometrie unterstützt.

Seine berufliche Karriere führte KLEIN 1875 an die TH München und 1880 an die Universität Leipzig, bevor er 1886 an die Universität Göttingen ging, wo er bis zur vorzeitigen Emeritierung 1913 wirkte. An allen drei Wirkungsstätten bemühte er sich erfolgreich, die Stellung der Mathematik zu

verbessern, und hatte insbesondere großen Anteil an dem Aufstieg Göttingens zu einem führenden Zentrum der mathematischen Forschung. KLEINS Interesse galt nun der komplexen Funktionentheorie und den automorphen Funktionen, zu denen er bedeutende Ergebnisse erzielte. Er stellte viele der RIEMANNschen Ideen ausführlich dar und gab eine allgemeine Definition der sog. RIEMANNschen Fläche, jenes Gebildes, das RIEMANN (1826–1866) eingeführt hatte, um auch die „mehrwertigen Funktionen“ der komplexen Funktionentheorie mathematisch korrekt als Funktionen, also als eindeutige Zuordnungen bezeichnen zu können. Durch diese Untersuchungen leistete KLEIN einen wichtigen Beitrag zum stärkeren Bekanntwerden der Verwendung geometrischer Vorstellungen in der Analysis, was sich für deren weitere Entwicklung als sehr fruchtbar erwies. 1882 publizierte er eine umfassende Ausarbeitung der geometrischen Funktionentheorie. KLEIN widmete sich besonders den automorphen und den Modulfunktionen. Wie H. POINCARÉ (1854–1912) legte er wichtige Ergebnisse zur eindeutigen Parameterdarstellung dieser Funktionen vor, wobei er auch neue Resultate zur Theorie linearer Differentialgleichungen erzielte.

Mit der Behandlung der allgemeinen Gleichung 5. Grades gab KLEIN ein weiteres Beispiel seiner Fähigkeit, verschiedene mathematische Gebiete geschickt zusammenzuführen. Die Lösungen von Gleichungen 5. Grades lassen sich im Allgemeinen nicht in einer Formel angeben, in der die Koeffizienten der Gleichung nur durch die arithmetischen Grundoperationen und Wurzelschachtelungen verknüpft sind. Unter Rückgriff auf Ergebnisse der Lösungstheorie algebraischer Gleichungen, der Gruppentheorie, der Funktionentheorie, der Theorie des Ikosaeders und über Differentialgleichungen konnte er 1884 eine vollständige Lösungstheorie der Gleichung 5. Grades angeben.

In den 90er Jahren widmete sich er dann verstärkt Problemen der Physik, speziell der Mechanik, und erzielte auch auf diesem Gebiet beachtliche Resultate. Gleichzeitig rückte jedoch die wissenschaftsorganisatorische Tätigkeit immer stärker in den Mittelpunkt seines Handelns. Große Aufmerksamkeit schenkte er der Verbreitung mathematischer Kenntnisse und dem mathematischen Unterricht. So war er maßgeblich an der Herausgabe der Fachzeitschrift „Mathematische Annalen“ und der „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen“ beteiligt. Intensiv versuchte er den zwischen Mathematikern und Ingenieuren entstandenen Konflikt über den notwendigen Anteil der Mathematik in der Ingenieurausbildung zu schlichten und auf beiden Seiten ein gewisses Verständnis für die Argumente der Gegenseite zu erreichen. Bezüglich des mathematischen Unterrichts an den Schulen trat er schon frühzeitig für eine Verbesserung des theoretischen Niveaus und eine anschaulichere, anwendungsorientierte Gestaltung wie auch für eine entsprechend veränderte Ausbildung der Lehrer ein. Ab 1894 betätigte er sich aktiv im Verein für die Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts und stritt im zähen Ringen um eine bessere Stellung der Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften sowie eine stärkere Berücksichtigung dieser Fächer in den Lehrplänen. Die auf KLEINS Initiative 1904 im Rahmen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte gegründete Unterrichtskommission legte auf den Tagungen der Gesellschaft 1904–1907 jeweils wichtige Vorschläge zur Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts vor, die mit seinem Namen eng verbunden sind. Mit der Bildung des Deutschen Ausschusses für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht und der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission erreichten die Reformbestrebungen dann 1908 eine breitere Basis. In beiden Organisationen spielte KLEIN eine wichtige Rolle.

KLEIN verstand es, geschickt Kontakt zu führenden Vertretern der Wirtschaft und der Politik aufzunehmen und sich die nötige Unterstützung für seine Ziele zu sichern. Auf diese Weise wirkte er vor dem 1. Weltkrieg sehr erfolgreich für die Förderung der angewandten Mathematik und für Umgestaltungen im Bildungswesen und war in diesem Sinne bis zu seinem Lebensende (22. 6. 1925 in Göttingen) ungewöhnlich aktiv.

*(Karl-Heinz Schlote)*

# Pierre Simon Laplace

(1749 bis 1827)



Laplace war eine überaus interessante Persönlichkeit, sowohl als Wissenschaftler als auch als Zeitzeuge unterschiedlicher Gesellschaftsverhältnisse, des *ancien régime*, der Großen Französischen Revolution, des französischen Kaiserreiches unter Napoleon I und der Restauration des französischen Königshauses der Bourbonen.

Laplace wurde am 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge (Normandie) geboren, als Sohn eines im Weinhandel reich gewordenen Vaters und einer aus einer wohlhabenden Bauernfamilie stammenden Mutter. Nach dem Besuch einer von Benediktinern geleiteten Schule wechselte Laplace 1766 an ein Jesuitenkolleg, das über gute Mathematiklehrer verfügte. Mit deren Empfehlung ging Laplace 1768 nach Paris und erhielt schließlich, mit Unterstützung von d'Alembert, eine Professorenstelle an der Militäarakademie. Zu seinen Schülern dort zählte auch Napoleon Bonaparte. Schon 1773 wurde Laplace Mitglied der Pariser Akademie.

Während der Revolutionszeit war Laplace, zusammen u. a. mit Lagrange und Monge, aktives Mitglied der Kommission für Maße und Gewichte, auf deren Tätigkeit die Einführung des dezimalen Maßsystems, insbesondere des Meters zurückgeht. Zudem war Laplace Professor an der Pariser „Ecole Polytechnique“, die zum führenden Zentrum von Mathematik und Naturwissenschaften während des 19. Jahrhunderts aufstieg. Unter Napoleon übte Laplace, allerdings nur für wenige Wochen, die Funktion des Innenministers aus; Napoleon bedachte ihn mehrfach mit hohen Ehrungen. Nach der Restauration, 1814, schloss sich Laplace den Bourbonen an und wurde zum Marquis und Pair von Frankreich ernannt. Laplace starb am 5. März 1827 in Paris.

Das wissenschaftliche Werk von Laplace ist außerordentlich vielseitig. Wahrscheinlichkeitsrechnung bildete einen Hauptgegenstand; die Publikation einschlägiger Arbeiten setzte schon 1766 ein und gipfelte 1812 in der „*Theorie analytique des probabilités*“ sowie 1814 in den populären, Formeln vermeidenden „*Essai philosophique sur les probabilités*“. Im Jahre 1796 erschien nach vielen ausführlichen Vorarbeiten die zweibändige „*Exposition du système du monde*“ mit der sog. Nebularhypothese zur Entstehung unseres Planetensystems und schließlich in den Jahren 1799 bis 1825 in fünf Bänden die großartige Himmelsmechanik „*Mécanique céleste*“. Weitere Arbeitsgebiete betreffen Wärmeleitung, Schallausbreitung und die Theorie der Kapillaren.

Sowohl in Verbindung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch zur Himmelsmechanik stehen die von Laplace erzielten Fortschritte in der Theorie der Differentialgleichungen.

Differentialgleichungen treten schon in der Geburtsstunde der Infinitesimalrechnung auf, wenn das Wort auch erst von Leibniz in einer Abhandlung aus dem Jahre 1684 geprägt wurde. Der Sache nach löste I. Newton bereits 1671 in seiner „*Fluxionsrechnung*“ und später in der dritten Auflage seiner „*Principia*“ derartige Gleichungen. Beispielsweise gab er für die Differentialgleichung

$\dot{y} \dot{y} = \dot{x} \dot{y} + \dot{x} \dot{x} x x$  ( $\dot{y}$  und  $\dot{x}$  bedeuteten dabei die Fluxionen, d.h. die Ableitungen von  $y$  bzw.  $x$ , nach der Zeit) die Lösung in Form der unendlichen Reihe  $y = x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{7} x^7 \mp \dots$  an. Überhaupt waren es vorwiegend verschiedene Klassen physikalischer Probleme, die schon frühzeitig auf gewöhnliche Differentialgleichungen führten: Pendelschwingung, Isochrone, Erdgestalt, Gravitationsgesetz, Kettenlinie, Balkenbiegung, Schleppkurve, Bewegung im widerstrebenden Medium u. a. m.

Jener ersten Phase, die wesentlich von Leibniz, Huygens sowie Jakob und Johann Bernoulli getragen wurde, folgte eine Hinwendung zur systematischen Behandlung von Differentialgleichungen – anfangs auf der Suche nach geschlossenen Lösungen, die sich durch elementare Funktionen ausdrücken lassen, bis man erkannte, dass die Lösungen höhere, bisher unbekannte Funktionen gleichsam definierten. Oft gab die Methode der unbestimmten Koeffizienten die Lösung in Form einer Potenzreihenentwicklung.

Zur Mitte des 17. Jahrhunderts beherrschte man u. a. homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, einige Typen höheren Grades sowie Systeme linearer Differentialgleichungen. Frühzeitig traten sogar partielle Differentialgleichungen auf, wobei auch hier physikalische Probleme häufig den Ausgangspunkt bildeten. Letzteres war auch ein Grund dafür, dass man die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erst verhältnismäßig spät systematisch studierte, während die der zweiten Ordnung schon frühzeitig Aufmerksamkeit erweckten.

Laplace nun behandelte in seinen Untersuchungen u. a. partielle lineare und nichtlineare Differentialgleichungen, wobei er an d'Alembert, an Euler, an Lagrange und andere anknüpfen konnte. Vor allem die Himmelsmechanik und Ausbreitungsvorgänge (Schall, Wärme) führten auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Für Laplace (und spätere Mathematikergenerationen) rückte die dann auch nach ihm benannte homogene partielle Differentialgleichung  $\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0$  für eine gesuchte Funktion  $V(x, y, z)$  in den Mittelpunkt, deren Lösungen Potentialfunktionen heißen.

Nach Laplace nennt man  $\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$  Laplaceoperator.

Nachdem – wie erwähnt – aus physikalischen Gründen zunächst partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung ins Blickfeld geraten waren, studierten Clairaut und Lagrange in den 70er Jahren des 18. Jahrhunderts auch lineare und nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Die durch Monge vorgenommene Verschmelzung der Theorie partieller Differentialgleichungen mit geometrischen Betrachtungsweisen führte in den 80er Jahren dann zu neuen Einsichten und Lösungsmethoden, die u. a. in die spätere Etablierung der Differentialgeometrie einmündeten.

Mit dem 19. Jahrhundert und der Industriellen Revolution setzte ein gewaltiger Aufschwung der Mathematik ein, in dessen Gefolge auch die mathematischen Methoden der Himmelsmechanik, der Geodäsie, der Mechanik und ganz allgemein der Physik ausgebaut wurden. Für die Theorien der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen wurden die Theorie der Wärmeausbreitung, die Funktionentheorie und die Potentialtheorie Schrittmacher; die Namen Fourier, Gauß, Green und Riemann stehen hier für viele andere. Schließlich wuchsen die Theorien der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen mit Variationsrechnung und Funktionentheorie zusammen zu einer als mathematische Physik bezeichneten Disziplin, die sich in Natur- und Ingenieurwissenschaften als überaus weit reichendes mathematisches Instrumentarium erwies und erweist.

*(Hans Wußing)*

# Gottfried Wilhelm Leibniz – Mathematiker, Philosoph, Staatsmann

(1646–1716)



Leibniz-Denkmal, Leipzig  
(von E. Hähnel, 1883)

Leibniz nimmt in der Geschichte vieler wissenschaftlicher Disziplinen eine herausragende Stellung ein. Er war ein überaus schöpferischer Mathematiker, ein Epoche machender Philosoph, ein vorzüglicher Historiker, ein gefragter Jurist. Leibniz lieferte wesentliche Beiträge zur Mechanik, zur Biologie, zur theoretischen Logik. Er kümmerte sich um Bergwerke, Seidenraupenzucht und viele technische Verbesserungen. Als Erster konstruierte er eine funktionsfähige Rechenmaschine für die vier Grundrechenarten. Leibniz war in wichtigen politischen und diplomatischen Missionen tätig. Er bemühte sich um den Ausgleich zwischen der katholischen und den reformierten Kirchen in Deutschland. Als einer der Ersten lenkte Leibniz das kulturhistorische Interesse Europas auf den Fernen Osten, insbesondere auf China.

Auf die Initiative von Leibniz geht auch die Gründung der „Berlin-Brandenburgischen Societät der Wissenschaften“, der Akademie, im Jahre 1700 in Berlin zurück; er war ihr erster Präsident. In einer Denkschrift zur Stiftung der Akademie schreibt er, es „wäre demnach der Zweck theorum cum praxi zu vereinigen ...“. *Theoria cum praxi* – das war zugleich das Motto der Arbeitsweise von Leibniz.

Leibniz, der Sohn eines Universitätsprofessors, wurde am 1. Juli 1646 in Leipzig geboren und erwarb sich schon als Kind in der väterlichen Bibliothek bedeutende Kenntnisse, vor allem in alten Sprachen. Mit 15 Jahren wurde er Student, 1664 dann Magister in Leipzig und promovierte mit 20 Jahren an der Universität Altdorf nahe Nürnberg. Im diplomatischen Auftrag des Mainzer Kurfürsten gelangte Leibniz 1672 nach Paris und machte dort sowie bei Aufenthalten in England die Bekanntschaft mit den neuesten Ergebnissen der Wissenschaften. Deutschland litt noch unter den Folgen des Dreißigjährigen Krieges und war auch in den Wissenschaften gegenüber Westeuropa zurückgeblieben. Da Leibniz in Paris keine Anstellung finden konnte, trat er schließlich als Bibliothekar und juristischer Berater 1676 in den Dienst der Herzöge von Hannover und entfaltete eine umfangreiche, weit gespannte Tätigkeit, die jedoch von seinen Dienstherrn in ihrer Bedeutung nicht gewürdigt wurde. Einsam und verbittert, von Krankheit gezeichnet, verbrachte Leibniz die letzten Lebensjahre.

Mathematik war nur ein Teil – freilich ein sehr wichtiger und in die Zukunft weisender Teil – der wissenschaftlichen Tätigkeit von Leibniz, die er im Besitz einer fast unglaublichen geistigen Beweglichkeit und Leistungsfähigkeit vollbracht hat. Sie stand (worauf hier nicht eingegangen werden kann), in engem innerem Zusammenhang auch zu seinem philosophischen Lebenswerk, insbesondere zu Naturphilosophie und Erkenntnistheorie.

Erst der Pariser Aufenthalt eröffnete Leibniz den Zugang zur damals in rascher Entwicklung befindlichen Mathematik. Zunächst erzielte Leibniz 1672/73 einige Erfolge bei der Summation unendlicher Reihen. Im Jahre 1673 lernte er Blaise Pascals Schrift über die Quadratur des Kreises kennen

und bemerkte dort die Bedeutung des heute als Steigungsdreieck bezeichneten „charakteristischen“ Dreiecks für das allgemeine Tangentenproblem. Im Oktober 1675 fasste Leibniz entscheidende Grundgedanken seiner Infinitesimalmathematik, seines „Calculus“, und erkannte den wechselseitigen Zusammenhang von Quadratur- und Tangentenproblem, also von Integration und Differentiation.

Die Lebensumstände haben es Leibniz nicht erlaubt, eine ihm vorschwebende zusammenhängende Darstellung der Wissenschaft vom Unendlichen, einer Infinitesimalmathematik niederzuschreiben. Er konnte lediglich, allerdings sehr wesentliche Teilergebnisse zum „Calculus“ veröffentlichen. In der neu gegründeten Leipziger Zeitschrift „Acta Eruditorum“ (Berichte der Gelehrten) erschien 1682 eine Abhandlung, die die Reihe für  $\frac{\pi}{4}$  und das Konvergenzkriterium für alternierende Reihen enthielt. Die Abhandlung aus dem Jahre 1684 ist die Geburtsstunde der Differentialrechnung. Hier tritt das Wort „Differentialrechnung“ zum ersten Mal auf; bis dahin hatte Leibniz von „direkter Tangentenmethode“ gesprochen. Auch erscheint an dieser Stelle das Differentiationszeichen  $d$  erstmals im Druck. Die Arbeit enthält die Differentiationsregeln für Summe und Differenz, für Produkt und Quotient, die Kettenregel, die zweite Ableitung, die Bedingung  $dv = 0$  für Extremwerte bzw.  $ddv = 0$  für Wendepunkte einer Funktion, die Lösung einer Differentialgleichung durch Trennung der Variablen. Zwei Jahre später, 1686, veröffentlichte Leibniz die Grundregeln der Integralrechnung. Hier erscheint das Integralzeichen  $\int$  als Stilisierung des Anfangsbuchstabens  $S$  von *Summa* erstmals im Druck. Das Wort „Integral“ geht auf Johann Bernoulli zurück; Leibniz sprach anfangs von „calculus summatorius“. Später fand Leibniz noch weitere wegbereitende Einzelergebnisse, z.B. zur Integration einiger Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, zur Berührung von Kurven und zur Theorie der Einhüllenden sowie zur Anwendung des „Calculus“ auf physikalische Probleme (u.a. Belastung eines Balkens, Fallbewegung im widerstrebenden Medium, Isochrone, Kettenlinie).

Darüber hinaus hat Leibniz – wie teilweise erst bei der Erschließung des Nachlasses erkennbar wurde – bedeutsame Beiträge zur mathematischen Logik, zur Determinantentheorie und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung geleistet.

Leibniz gehört, neben Descartes und Euler, zu den Hauptgestaltern der mathematischen Symbolik und Terminologie. „Bei den Bezeichnungen“, so sagt Leibniz, „ist darauf zu achten, dass sie für das Erfinden bequem sind“. Der Gebrauch des Wortes *Funktion* geht auf Leibniz zurück. Im Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli (1694 bis 1698) einigte man sich auf die Begriffsbezeichnungen *Konstante*, *Variable*, *Koordinate*, *Parameter*, *algebraische* und *transzendente Funktion*. Von Leibniz stammen der Gebrauch von Indizes und Doppelindizes, die Überstreichung von Buchstaben, die Determinantenschreibweise, die Schreibweise  $a : b = c : d$  für Proportionen (mit Doppelpunkt und Gleichheitszeichen).

Der „Calculus“, d. h. die leibnizsche Form der Infinitesimalmathematik, setzte sich, nicht zuletzt wegen der glücklich erfundenen Bezeichnungen, auf dem Kontinent rasch durch und erwies sich in den Händen von Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli und Euler als überaus leistungsfähig in der Mathematik selbst, aber auch bei Anwendungen in Astronomie, Physik und Technik. In England dagegen behauptete sich die von Newton geschaffene Form der Infinitesimalrechnung noch bis ins 19. Jahrhundert.

Unglücklicherweise wurden Newton und Leibniz in einen von ihren jeweiligen Anhängern erbittert geführten Prioritätsstreit um die Erfindung der Infinitesimalrechnung verwickelt. Heute steht fest, dass beide unabhängig voneinander zu ihren Entdeckungen auf dem Gebiet der Infinitesimalmathematik gelangt sind.

(Hans Wußing)

# Brook Taylor

(1685 bis 1731)



Brook Taylor wurde am 18. August 1685 in Edmonton bei London als Sohn eines Landadligen geboren. Nach dem Privatunterricht im elterlichen Haus und der Förderung seiner musischen Interessen studierte er ab 1701 in Cambridge am St. John's College Rechtswissenschaften und wandte sich später zusätzlich der Mathematik zu. 1709 erwarb er das Bakkalaureat der Rechte und promovierte 1714 zum Doktor der Rechte. Im gleichen Jahr wurde Taylor Sekretär der Royal Society, einen Posten, den er bis 1718 ausübte. Aus gesundheitlichen Gründen war er anschließend als Privatgelehrter tätig. Trotz mehrerer Kuraufenthalte in verschiedenen Badeorten konnte er seine Gesundheit nicht stabilisieren. Hinzu kamen persönliche Schicksalsschläge: 1723 starben seine Frau und der neugeborene Sohn, 1729 seine zweite Frau nach der Geburt einer Tochter. Brook Taylors Leben vollendete sich am 29. Dezember 1731.

Im Jahre 1708 verfasste Taylor seine erste mathematische Arbeit, worin er ein physikalisches Problem behandelte. Auch in den folgenden Arbeiten griff er wiederholt Fragestellungen aus der Physik auf, in deren Kontext ihm wertvolle mathematische Entdeckungen gelangen. So bestimmte er eine Lösung für die schwingende Saite, die dem Grundton entsprach, ermittelte eine singuläre Lösung einer Differentialgleichung und verwandte eine Substitution, die die Ableitung einer Funktion mit der zu ihr inversen Funktion verknüpfte. Besonders hervorhebenswert ist Taylors Behandlung der Perspektive in strenger formaler Weise, wobei er das Konzept des Fluchtpunktes und der Fluchtlinie definierte und anwandte. Zugleich entwickelte er Problemstellungen, die später von J. H. Lambert aufgegriffen wurden und zu den Anfängen der Photogrammetrie führten.

Trotz der zahlreichen und vielseitigen wissenschaftlichen Leistungen ist mit Taylors Namen jedoch nur jener Satz verknüpft, der die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe behandelt. Die 1715 publizierte Formel hatte Taylor bereits 1712 einem Briefpartner mitgeteilt. In modernisierter Bezeichnungsweise besagt der Satz folgendes:

Sei  $y = y(x)$  eine Funktion und  $x = x_0 + n \Delta x$ , dann gilt die Interpolationsformel

$$y = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

Eine solche Formel war in jener Zeit keine Seltenheit. Bereits I. Newton gab 1691/92 in dem Entwurf zu der Arbeit „De Quadratura“ und 1694 Joh. Bernoulli in einer Publikation in den „Acta Eruditorum“ eine ähnliche Formel an. Möglicherweise kannte auch J. Gregory eine solche Formel, schließlich traten in verschiedenen seiner Manuskripte die Reihenentwicklungen zahlreicher Funktionen mit fünf oder sechs Termen und die sogenannte gregory-newtonsche Interpolationsformel auf. Aus Letzterer lässt sich die o. g. Gleichung direkt ableiten. Um den Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$

und  $n \rightarrow \infty$  vollziehen zu können, substituierte Taylor dann  $n - i = \frac{x - x_i}{\Delta x}$  und erhielt nach einigen Umformungen in Newtonscher Fluxionenschreibweise

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \cdot \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot \frac{\ddot{\ddot{y}}_0}{(\dot{x}_0)^3} + \dots$$

(Newton betrachtete die Größen  $x$  und  $y$  als fließend in der Zeit, d.h., sie werden als stetig differenzierbare Funktionen der Zeit behandelt. Ersetzt man die aus den Fluxionen gebildeten Quotienten durch die üblichen Ableitungen einer Funktion  $y = f(x)$ , so erhält man die heute gebräuchliche Form.)

Natürlich führte Taylor noch keinen strengen Grenzübergang durch. Somit fehlt das Wichtigste der Formel, das Restglied. Auch in C. MacLaurins Arbeiten, der 1742 in seiner Behandlung der Fluxionenrechnung die nach ihm benannte Taylor-Reihe für  $x_0 = 0$  ableitete, findet sich kein Restglied, ebenso nicht bei L. Euler in seinem berühmten Lehrbuch zur Differentialrechnung „Institutiones calculi differentialis“ (1755). Als jedoch L. J. Lagrange 1797 in seiner „Théorie des fonctions analytiques“ einen Aufbau der Differential- und Integralrechnung auf algebraischer Grundlage publizierte, beendet er die Reihe mit einem Restglied. Lagrange konnte das Restglied sogar angeben. Nach einigen einfachen Abschätzungen und einer Annahme, die im wesentlichen dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung entsprach, erhielt er die heute als „lagrangesch“ bezeichnete Form des Restgliedes:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Zwar vermerkte Lagrange, dass man bei der Verwendung der Reihe stets das Restglied berücksichtigen solle, doch auch er führte weder strenge Konvergenzbetrachtungen durch, noch stellte er einen Zusammenhang zwischen dem Wert des Restgliedes und der Konvergenz der Reihe her. Konvergenzbetrachtungen waren zu diesem Zeitpunkt aber keineswegs völlig neu. 1768 hatte J. d'Alembert das Quotientenkriterium für die Konvergenz einer Reihe formuliert, doch handelte es sich dabei um Zahlen- und keine Potenzreihen.

Einen entscheidenden Schritt vollzog dann A. L. Cauchy am Anfang des 19. Jahrhunderts. Nachdem er im „Cours d'analyse“ eine exakte Definition der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung gegeben hatte, leitete er 1823 in den „Leçons sur le calcul différentiel“ den Taylorsche Satz einschließlich des Restgliedes ab, formuliert in der sogenannten Cauchyschen Form:

$$R_n = (1 - \theta)^n \frac{(x - a)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))$$

Der entscheidende Punkt war Cauchys Feststellung, dass die unendliche Taylor-Reihe genau dann gegen die Funktion konvergiert, von der sie abgeleitet wurde, wenn das Restglied gegen 0 konvergiert. Schließlich führte er die Funktion  $e^{-\frac{1}{x^2}}$  an, von der im Punkt  $x = 0$  alle Ableitungen existieren, die aber keine Taylor-Entwicklung um diesen Punkt besitzt.

Die Mathematiker des 19. und 20. Jahrhunderts haben auf dieser Basis die Aussage des Taylorschen Satzes weiter präzisiert und verallgemeinert sowie weitere Formen des Restgliedes abgeleitet. Bei allen späteren Korrekturen bleibt Brook Taylor das Verdienst, einen wichtigen Sachverhalt der Infinitesimalmathematik und ein bedeutendes Hilfsmittel für die Lösung zahlreicher praktischer Probleme erkannt und im Stile seiner Zeit formuliert zu haben.

(Karl-Heinz Schlote)